Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

Devoir du 12/12/2001

Correction

Exercice I

1. On a
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^N$$
dont la limite est 1 lorsque N tend vers $+\infty$. Ainsi la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente et on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

2. Si $q=1$ alors $\sum_{n=1}^{N}q^n=N$ dont la limite est $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$ ainsi la série diverge. Sinon $q\neq 1$, alors
$$\sum_{n=1}^{N}q^n=q\cdot\frac{1-q^N}{1-q}=\frac{q}{1-q}-\frac{q^N}{1-q}$$
Par suite, la série converge si et seulement si $|q|<1$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in[n,n+1]$ on a
$$\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n}$$
ce qui implique les 5 lignes suivantes
$$\begin{array}{rcl}
\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx & \leq & \int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,dx\\
\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx & \leq & \frac{1}{n}\\
\sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\\
\int_1^{N+1}\frac{1}{x}\,dx & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\\
\ln(N+1) & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}
\end{array}$$
Or $\lim_{N\to+\infty}\ln(N+1)=+\infty$ donc la série diverge.

4.

- Supposons $s>0$ (et différent de 1). Soit $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in[n,n+1]$ on a
$$\frac{1}{(n+1)^s}\leq f(x)\leq\frac{1}{n^s}$$
ce qui implique les 6 lignes suivantes
$$\begin{array}{rcccl}
\int_n^{n+1}\frac{1}{(n+1)^s}\,dx & \leq & \int_n^{n+1}f(x)\,dx & \leq & \int_n^{n+1}\frac{1}{n^s}\,dx\\
\frac{1}{(n+1)^s} & \leq & \int_n^{n+1}f(x)\,dx & \leq & \frac{1}{n^s}\\
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^s} & \leq & \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}f(x)\,dx & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\\
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)^s} & \leq & \int_1^{N+1}f(x)\,dx & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\\
\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^s} & \leq & \frac{1}{(s-1)(N+1)^{s-1}}-\frac{1}{s-1} & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}\\
\frac{1}{(N+1)^s}-1+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} & \leq & \frac{1}{(s-1)(N+1)^{s-1}}-\frac{1}{s-1} & \leq & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}
\end{array}$$

Si $s > 1$ alors l'inégalité de gauche donne la convegence de la série. Si $s < 1$ alors l'inégalité de droite donne la divergence de la série.

- Supposons $s < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n^s} = n^{-s} \geq 1$ donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} \geq \sum_{n=1}^{N} 1 \geq N$ donc lorsque N tend vers $+\infty$ la série diverge.

Conclusion : la série converge si et seulement si $s > 1$.

5. Par définition de ζ, il résulte de la quesiton précédente que le domaine de définition est $]1, +\infty[$.

Exercice II

1. Soit $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$. La série converge donc $\lim_{N\to+\infty} S_N$ existe et on a $\lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} S_{N-1}$. Par suite $\lim_{N\to+\infty}(S_N - S_{N-1}) = 0$ donc $\lim_{N\to+\infty} u_N = 0$.

2. La réciproque est fausse comme le montre le contre exemple de la question 3 de l'exercice I.

Exercice III

1.

a . Pour tout entier $N \geq 1$ on a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leq \sum_{n=1}^{N} v_n$$

Si la série du membre de droite converge alors elle est bornée. Donc $\sum_{n=1}^{N} u_n$ est majoré.
Comme $\sum_{n=1}^{N+1} u_n - \sum_{n=1}^{N} u_n = u_{N+1} > 0$, la série est croissante.
En conséquence elle est convergente.

b . Il s'agit de la contraposée de la question précédente.

c . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $n + 1 \leq 2n$ donc $\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2n}$. La série de associée au membre de droite est $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ dont on a montré la divergence dans la question 3 de l'exercice I. Ainsi, par ce qui précéde la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge également.

2.

a . Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes en $+\infty$ équivaut à

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

donc il existe une suite de référence (w_n) tendant vers 0 tel que $|\frac{u_n}{v_n} - 1| \leq w_n$. Puisque w_n tend vers 0, il existe un rang N à partir duquel $w_n < \frac{1}{2}$ on a alors $|\frac{u_n}{v_n} - 1| < \frac{1}{2}$ ce qui implique $\frac{u_n}{v_n} < \frac{3}{2}$ d'où

$$\forall n \geq N,\ u_n < \frac{3}{2} v_n \tag{1}$$

On a également $\frac{1}{2} < \frac{u_n}{v_n}$ d'où

$$\forall n \geq N,\ \frac{1}{2} v_n < u_n \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) donnent

$$\forall n \geq N,\ \frac{1}{2}v_n < u_n < \frac{3}{2}v_n$$

la question 1 permet de conclure.

b . Cette suite est équivalente à $\frac{1}{n^2}$ puisque $\lim \frac{\frac{2n-1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge selon la question 4 de l'exercice I.

3.

a . On a

$$\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right) = 0$$

donc il existe une suite de référence (w_n) tendant vers 0 telle que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| \leq w_n$$

Comme $\lim w_n = 0$ et que $L < 1$, il existe un rang N à partir duquel $w_n < \frac{1-L}{2}$. Ce qui implique les 3 lignes suivantes

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1-L}{2} + L$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+L}{2}$$

$$u_{n+1} \leq \frac{1+L}{2}u_n \tag{3}$$

Soit alors (H_p) l'hypothèse de recurrence

$$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^p u_{n-p}$$

on a

- (H_0) est vraie puisque $u_n \leq u_n$
- Supposons (H_p) vraie alors

  $$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^p u_{n-p}$$

  mais (3) et $p \leq N$ donnent alors

  $$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^p \frac{1+L}{2}u_{n-p-1}$$

  donc

  $$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{p+1} u_{n-(p+1)}$$

  ce qui établit (H_{p+1}).

Nous avons donc établit que pour tout entier $p \leq N$

$$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^p u_{n-p}$$

donc pour $p = N$ on a

$$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-N} u_N$$

donc $u_n \leq Cq^n$ où $q = (1+L)/2 \in [0, 1[$ et C est un réel positif indépendant de n. La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n converge et la question 1 de l'exercice III permet alors de conclure.

b . De manière analogue, il existe un rang N à partir duquel $u_{n+1} > \frac{1+L}{2} u_n$. Par suite

$$u_n \geq Cq^n$$

avec $q = (1+L)/2 > 1$ et C un réel positif indépendant de n. La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n diverge et la question 1 de l'exercice III permet qlors de conclure.

c . Les séries de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ donnent toutes les deux $L = 1$ pourtant la première diverge et la seconde converge. Il n'y a donc pas d'espoir de conclure simplement à partir de L.

d . On a

$$\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1}$$

donc $L = 0 < 1$, en conséquence la série de terme général $\frac{n^2}{n!}$ converge.

4.

a . On a

$$\lim \left(\sqrt[n]{u_n} - L\right) = 0$$

donc il existe une suite de référence (w_n) tendant vers 0 telle que

$$|\sqrt[n]{u_n} - L| \leq w_n$$

Comme $\lim w_n = 0$ et que $L < 1$, il existe un rang N à partir duquel $w_n < \frac{1-L}{2}$. Ce qui implique que

$$\sqrt[n]{u_n} \leq \frac{1+L}{2}$$

ainsi

$$u_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

Soit $q = (1+L)/2 \in [0, 1[$. La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n converge et la question 1 de l'exercice III permet alors de conclure.

b . On a

$$\lim\,(\sqrt[n]{u_n} - L) = 0$$

donc il existe une suite de référence (w_n) tendant vers 0 telle que

$$|\sqrt[n]{u_n} - L| \leq w_n$$

Comme $\lim w_n = 0$ et que $L > 1$, il existe un rang N à partir duquel $w_n < \frac{L-1}{2}$. Ce qui implique que

$$\sqrt[n]{u_n} \geq \frac{1+L}{2}$$

ainsi

$$u_n \geq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

Soit $q = (1+L)/2 > 1$. La question 2 de l'exercice I permet d'affirmer que la série de terme général q^n diverge et la question 1 de l'exercice III permet alors de conclure.

c . En considérant $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$. On a $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln n)$ et $\lim(\frac{1}{n}\ln n) = 0$ donc $L = 1$. De même $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \exp(\frac{1}{n^2}\ln n)$ et $\lim(\frac{1}{n^2}\ln n) = 0$ donc $L = 1$. A nouveau, les séries de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ donnent toutes les deux $L = 1$ pourtant la première diverge et la seconde converge. Il n'y a donc pas d'espoir de conclure simplement à partir de L.

d . On a

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^n} = \frac{n+1}{n^2+2}$$

dont la limite est $L = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, ainsi la série associée converge.