

Devoir à rendre le 12/12/2001

Séries

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_N)_{N \geq 1}$ définie par

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n$$

on dit que la série converge si et seulement si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N u_n = l \in \mathbb{R}$ dans ce cas on note $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = l$. Au contraire si $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N u_n$ n'est pas un réel (ou n'existe pas) on dit que la série diverge.

Exercice I

1. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente.
2. Discuter la convergence de la série de terme général q^n selon la valeur du paramètre réel q .
3. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.
4. Discuter la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ selon la valeur du paramètre réel s .
5. En déduire le domaine de définition de la fonction ζ de Cauchy définie dans l'exercice II de la feuille d'exercices 2.

Exercice II

1. Montrer que si la série de terme général u_n converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice III

Dans cet exercice on considère des suites à termes strictement positif.

1. Théorème de comparaison — Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$.
 - a . Montrer que si la série de terme général v_n converge alors la série de terme général u_n converge.
 - b . Montrer que si la série de terme général u_n diverge alors la série de terme général v_n diverge.
 - c . Application : montrer que la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ diverge.

- 2.** Théorème d'équivalence — Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.
- a .** Montrer que les séries associées sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.
 - b .** Application : montrer que la série de terme général $\frac{2n-1}{n^3+1}$ converge.
- 3.** Règle de Dalember — Soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$
- a .** Montrer que si $L < 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
 - b .** Montrer que si $L > 1$ alors la série de terme général u_n est divergente.
 - c .** Montrer que si $L = 1$ alors on ne peut pas conclure.
 - d .** Application : étudier la série de terme général $\frac{n^2}{n!}$.
- 4.** Règle de Cauchy — Soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$
- a .** Montrer que si $L < 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
 - b .** Montrer que si $L > 1$ alors la série de terme général u_n est divergente.
 - c .** Montrer que si $L = 1$ alors on ne peut pas conclure.
 - d .** Application : étudier la série de terme général $\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^n$.