

Devoir du 28/11/2000

correction

Exercice I

1. Pour tout entier i dans $[1, n]$ on a $u_i \leq 1$ donc $\frac{u_i}{2^i} \leq \frac{1}{2^i} = \left(\frac{1}{2}\right)^i$ donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

par suite $S_n \leq T_n$.

$$T_n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc $\lim T_n = 1$ ainsi $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante (puisque $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$) et majorée par une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 1. Par suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et sa limite est inférieure ou égale à 1. Sa limite est positive puisque tous les termes sont positifs. Nous avons donc démontré que $\lim S_n \in [0; 1]$. Il s'agit maintenant de démontrer que $\lim S_n \notin \{0; 1\}$.

Supposons que $\lim S_n = 0$ alors pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on a $u_i = 0$ donc (u_n) est constante ce qui est exclu.

Supposons que $\lim S_n = 1$. S'il existe $i_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{i_0} = 1$ alors $S_n \leq 1 - \frac{u_{i_0}}{2^{i_0}}$ donc $\lim S_n \neq 1$. Ainsi on doit avoir $\forall i \in \mathbb{N}^*, u_i = 1$ ce qui est en contradiction avec (u_n) est constante.

2. soit $x \in]0; 1[$. Posons a_n égale au n -ième chiffre apparaissant dans le développement de x en base 2 que l'on construit par récurrence

$$\begin{cases} a_1 = E(2x) \\ a_i = E(2^i x - \sum_{j=1}^{i-1} a_j 2^{i-j}) \text{ pour } i \geq 1 \end{cases}$$

On appelle ce développement le *développement diadique* de x .

3. Le réel $\frac{1}{2}$ a deux développements diadiques : La suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 2$ et la suite (b_n) définie par $b_1 = 0$ et $b_n = 1$ pour $n \geq 2$. De manière générale tous les réels $\frac{p}{2^n}$ de $]0; 1[$ sont dans ce cas. Considérons l'application de $]0; 1[$ dans $]0; 1[\setminus B$ définie par $\phi(x) = \frac{x}{4}$ si x n'est pas de la forme $\frac{p}{2^n}$ et $\phi(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$ sinon. Cette application est injective. D'autre part il existe une injection de $]0; 1[\setminus B$ dans $]0; 1[$ (l'injection canonique par exemple). Donc $]0; 1[\setminus B$ et $]0; 1[$ sont en bijection.

Exercice II

1. Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Considérons l'application ϕ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \{0; 1\}) \\ E &\mapsto \left(\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \rightarrow \{0; 1\} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \in E \\ 0 & \text{si } n + 1 \notin E \end{cases} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Cette application est injective, en effet soit E et F deux éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ tels que $\phi(E) = \phi(F)$ alors

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \rightarrow \{0; 1\} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \in E \\ 0 & \text{si } n+1 \notin E \end{cases} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \mathbb{N}^* \rightarrow \{0; 1\} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n \in F \\ 0 & \text{si } n+1 \notin F \end{cases} \end{array} \right)$$

donc $E = F$.

D'autre part ϕ est surjective, en effet soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \{0; 1\})$. Soit E l'image réciproque de $\{1\}$ par f , c'est-à-dire l'ensemble des entiers dont l'image par f est 1. On a $f = \phi(E)$.

Ainsi ϕ est bijective.

2. L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \{0; 1\})$ est l'ensemble des suites à coefficients dans $\{0; 1\}$ et $n \geq 1$. Cet ensemble est infini et donc en bijection avec l'ensemble des suites à coefficients dans $\{0; 1\}$ et $n \geq 1$ privé des deux éléments suivants "les suites constantes égales à 0 et à 1".

Ce dernier ensemble est en bijection avec $]0; 1[$ de par l'exercice I.

Par suite $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \{0; 1\})$ et $]0; 1[$ sont en bijection.

3. Soit ϕ l'application de $]0; 1[$ dans \mathbb{R} définie par $\phi(x) = \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$. Cette application est bijective.

La question 2 permet donc d'affirmer que \mathbb{R} et $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*; \{0; 1\})$ sont en bijection.

La question 1 permet de conclure que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et \mathbb{R} sont en bijection.

Exercice III

1. Supposons qu'il existe une bijection f de \mathbb{N} dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $A = \{x \in \mathbb{N}, x \notin f(x)\}$ On a $A \subset \mathbb{N}$ donc $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit alors $a = f^{-1}(A)$. Si $a \in A$ alors $a \notin f(a)$ mais alors $a \notin A$ ce qui est absurde. Donc $a \notin A$ alors $a \in f(a)$ donc $a \in A$ mais cela aussi est absurde. Donc une telle bijection f ne peut exister. Ainsi \mathbb{N} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas en bijection.

2. Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec \mathbb{R} et que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas en bijection avec \mathbb{N} on en déduit que \mathbb{R} n'est pas en bijection avec \mathbb{N} , c'est-à-dire que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.