Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — Semestre 1

# Devoir à rendre le 28/11/01

*Indénombrabilité de* $\mathbb{R}$

Le but de ce devoir est de montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ noté $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et d'en déduire que $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

## Exercice I

**1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite non constante d'éléments de $\{0;1\}$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{2^i}$. Montrer que $S_n \leq T_n$ avec $T_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \in ]0,1[$$

**2.** Montrer que pour tout réel $x \in ]0,1[$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{0;1\}$ telle que

$$x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{2^n}$$

**3.** Soit $B$ l'ensemble des réels de $]0;1[$ pour lesquels il existe deux suites différentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que

$$x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{2^n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{v_n}{2^n}$$

Montrer qu'il existe une bijection de $]0,1[\setminus B$ dans $]0,1[$.

## Exercice II

**1.** Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et l'ensemble des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\{0;1\}$ que l'on note $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \{0;1\})$

**2.** Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \{0;1\})$ et $]0,1[$ sont en bijection.

**3.** Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection.

## Exercice III

**1.** Montrer que $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas en bijection. On pourra supposer qu'une telle bijection $f$ existe et considérer l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{N},\ x \notin f(x)\}$$

**2.** En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.