Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — Semestre 2

Feuille d'exercices 7

Compacité

Exercice I

Pour chacun des ensembles A suivants, et des recouvrements $(\Omega_i)_{i\in I}$ dites s'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini. Comparez avec le théorème de Borel-Lebesgue.

1. $A =]0,1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

2. $A = [0,1]$, $\Omega_i =]-\frac{1}{i}, 1+\frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$

3. $A =]0,+\infty[$, $\Omega_i =]0, i[$, $I = \mathbb{N}^*$

Exercice II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})$ et $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. L'ensemble A est-il fermé ? Est-il ouvert ? Est-il compact ?

2. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass[1] que peut-on dire des points d'accumulations de $\overline{A}$?

3. Determiner A', A^*, $\overline{A}$, $\mathring{A}$ et ∂A.

Exercice III

1. Une suite d'éléments d'un ensemble sans point d'accumulation peut-elle être convergente ?

2. L'ensemble des termes d'une suite convergente admet-il toujours au moins un point d'accumulation ? Sinon quelle(s) conditions faut-il ajouter ? Si oui, est-ce que ce point d'accumulation est necessairement la limite de la suite ?

---

[1] Karl Weierstrass, mathématicien allemand, du XIXe siècle, est connu notamment pour sa construction de la théorie des fonctions complexes. Dans ses conférences de 1859-60 Weierstrass donne une introduction inovante à l'analyse et en 1860-61, il traite du calcul intégral. Dans son cours de 1863-64 sur la théorie générale des fonctions analytiques, Weierstrass commence à formuler sa théorie des nombres réels. La notion de convergence uniforme que vous verrez en CS 201 est due à Weierstrass. Il a aussi contribué à la théorie des formes bilinéaires et quadratiques que vous verrez en CS 106.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

Exercice IV

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$, deux ensembles.

1. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ est-elle toujours vraie sans l'hypothèse A ouvert ?

3. Donner un exemple d'ensembles ouverts A et B tels que les quatre ensembles

$$A \cap \overline{B}\ , \quad \overline{A} \cap B\ , \quad \overline{A \cap B} \quad \text{et} \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

soient tous différents.

Exercice V

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$A^n = \left\{ x \in \mathbb{R}, \ \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[\cap A \neq \emptyset \right\}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{A} \subset A^n$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \cup_{x \in A}]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n est un ouvert

4. Montrer que $\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$

5. Montrer que tout fermé est l'intersection dénombrable d'ouverts. Cela est-il encore vrai si on remplace "dénombrable" par "fini" ?