Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
Semestre 2

Feuille d'exercices 5

Ouverts et Fermés

Exercice I

1. L'ensemble $[0,2]$ est-il un voisinage de 2 ? Qu'en est-il de $[0,2[$?

2. L'ensemble $[0,2]$ est-il un voisinage de 1 ? Qu'en est-il de $[0,2[$?

3. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il un voisinage de $\mathbb{Z}$?

Exercice II

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un ouvert ou non.

$$\begin{array}{lll}
A = \,]2,3[& B = \,]2,3[\cup]4,5[& C = \,]-1,0[\cup]0,1[\\
D = [1,2] & E = \,]0,1[\cup\{2\} & F = \,]-\infty,0[\\
G = \mathbb{Z} & H = \mathbb{R}^* & I = [0,4[\\
J = \{0\} & K = \mathbb{Q} & L = \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[
\end{array}$$

Exercice III

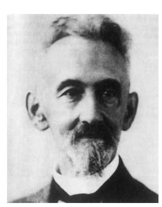
Soit A un ouvert majoré, montrer que A ne contient pas sa borne supérieure.

Exercice IV

Montrer que $\mathbb{R}$ a la propriété de Hausdorff[1]

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\neq y,\ \exists(V,W)\in\mathcal{V}(x)\times\mathcal{V}(y),\ V\cap W=\emptyset$$

[1] Felix Hausdorff, mathématicien Allemand du XXe siècle, travailla sur les fondements des mathématiques et la topologie. On lui doit une série de résultats, dont l'ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* paru en 1914 où, en se basant sur les travaux de Fréchet, il crée la théorie de la topologie et des espaces métriques.



Felix Hausdorff (1868–1942)

Exercice V

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un fermé ou non.

$$
\begin{array}{lllllllll}
A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A \cup \{0\} & C & = &]0,1] \cup \{0;2;4\} \\
D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0] \cup \{-1;2\} \\
G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[
\end{array}
$$

Exercice VI

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ tels que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

1. Peut-on avoir $A \cup B$ ouvert ? fermé ?

2. Peut-on avoir $A \cap B$ ouvert ? fermé ?