Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I | Semestre 2

Feuille d'exercices 4

Suites numériques récurrentes

Exercice I

Déterminer le terme général de la *suite de Fibonacci*[1] définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice II

Calculer les 5 premiers termes des suites suivantes, au moyen d'un graphe

1. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n$ pour $n \geq 0$

2. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n$ pour $n \geq 0$

Exercice III

On considére la relation de recurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation.

2. Pour chaque équilibre dites s'il est stable ou instable.

3. Au moyen d'un graphe, que vous réaliserez sur le papier milimétré joint, determinez la valeur des 4 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{2}$.

[1]Leonardo Pisanno, surnomé Fibonnaci, est un mathématicien italien du début du XIIIe siècle. Il passa son enfance en Afrique du Nord où son père dirigeait une sorte de comptoir. C'est ainsi qu'il eut l'occasion d'étudier les travaux algébriques d'al-Khuwārizmī. Par la suite il voyagea dans le monde méditerranéen recontrant de nombreux scientifiques et prenant connaissance des différents systèmes de calculs en usage. De retour à Pise, il publie *Liber abaci* où il expose le système de numération indo-arabe et le compare au système romain. Il est le premier grand mathématicien occidental à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Fibonacci poursuivit également ses propres travaux, il est à l'origine de cette suite récurrente, qui décrit la démographie d'une population de lapins.

Leonardo Pisano dit Fibbonacci ($\sim$ 1170–1250)

Exercice IV

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{cases}$$

Discuter selon a le comportement de la suite.

Exercice V

Soit (u_n) une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \frac{5}{6} \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{6}u_{n-1} \end{cases}$$

1. Donner le terme général de (u_n)

2. Montrer que $\lim u_n = 0$

3. La suite est-elle croissante ? Décroissante ? Non monotone ?