Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
Semestre 1

Feuille d'exercices 2

Récurrence et notation somme

Exercice I

1. Montrer, par récurrence, que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Les sommes précédentes dépendent-elles de i ? de n ?

3. Que vallent les sommes suivantes ?

$$\sum_{j=1}^{n} i, \quad \sum_{j=1}^{n} j, \quad \sum_{t=1}^{n} t, \quad \sum_{t=1}^{n} t^2$$

Exercice II

On appelle *fonction ζ de Riemann*[1] la fonction

$$\zeta(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$$

1. La fonction $\zeta(2)$ dépend-elle de n ? De N ? On ne demande pas de calculer cette valeur.

2. Trouver une fonction f_n dépendant de l'entier n pour que $\zeta(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)$

3. Trouver une fonction g_n dépendant de l'entier n pour que $\zeta(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} g_n(x)$

[1] Bernhard Riemann, mathématicien allemand du XIXe siècle, clarifia la notion d'intégrale en définissant ce que nous appelons aujourd'hui l'intégrale de Riemann. On lui doit également une géométrie dans les espaces courbes, appelée *géométrie Riemannienne*. Dans cette géométrie la somme des angles d'un triangle n'est pas 180 degrés. Albert Einstein l'utilisa pour expliquer la gravitation en théorie de la relativité générale. Riemann démontra que le lieu des zéros la fonction ζ dans $\mathbb{C}$ est lié au fait que la densité des nombres premiers est en $1/\ln(n)$. Il conjectura que ces zéros sont tous sur la droite $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ (*hypothèse de Riemann*). Hadamard et de la Vallée Poussin établirent le résultat sur la densité des nombres premiers en 1896, en revanche l'hypothèse de Riemann est, à ce jour, non résolue.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)

Exercice III

Simplifier l'expression suivante

$$\sum_{i=1}^{p} u_{i+1} + 5\sum_{k=3}^{p-2} u_{k-1} - 3\sum_{n=0}^{p-1}(u_n + u_{n+2})$$

Exercice IV

Soit (u_n) la suite définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = 2u_n^2 + 3u_n \end{array} \right.$$

1. Démontrer que (u_n) est une suite croissante à termes positifs.

2. Démontrer que (u_n) est divergente.