

## Feuille d'exercices 1

### *Notions de base*

#### Exercice I

Les applications suivantes sont-elle injectives ? Sont-elles surjectives ?

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* & f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ (p, q) \mapsto 3^p(2q+1) & (p, q) \mapsto 3^p(2q+1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* & i : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^* \\ (p, q, r) \mapsto 2^p 3^q 4^r & (p, q, r) \mapsto 2^p 3^q 5^r \end{array}$$

#### Exercice II

On considère l'application

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (p, q) \mapsto (p+q, pq) \end{array}$$

1.  $\varphi$  est-elle injective ?
2.  $\varphi$  est-elle surjective ?
3.  $\varphi$  est-elle bijective ?

#### Exercice III

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Minkowski<sup>1</sup> soit une égalité .

---

<sup>1</sup>Hermann Minkowski, mathématicien Russe de la fin du XIXe siècle, fut élève de Hilbert et enseignant d'Einstein. Ses travaux en géométrie furent utile à la théorie de la relativité générale.



Hermann Minkowski (1864–1909)

### Exercice IV

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  non vides et non réduits à un point. Trouver une bijection entre  $I$  et  $J$ .

### Exercice V

Résoudre les inéquations suivantes.

1.  $\sqrt{3-x} \leq 1$
2.  $\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} \geq 6$
3.  $|x+2| = 3$
4.  $|x+5| \leq 9$
5.  $|x+1| + |x-3| \leq 9$
6.  $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+4} - 1$

### Exercice VI

Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, un majorant, le plus grand élément, la borne supérieure, un minorant, le plus petit élément, la borne inférieure.

$$\begin{array}{lll} A = [0, 5[ & B = [0, 5[\cup\{7\} & C = ]-\infty, 0[\cup]1, 3[ \\ D = \mathbb{Z} \cap ]-2, 2] & E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} & F = \{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\} \end{array}$$

### Exercice VII

Soit  $I$  et  $J$  deux intervalles. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles ?

1.  $I \cup J$
2.  $I \cap J$
3.  $I + J = \{x + y, x \in I, y \in J\}$

### Exercice VIII

Résoudre les systèmes suivants

$$(S) \begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 56 \\ x - y + \sqrt{x-y} = 30 \end{cases} \quad (T) \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 3 \end{cases}$$

### Exercice IX

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère l'équation  $x^2 + mx - m = 0$ . Discuter, selon  $m$ , le nombre de solutions de l'équation et calculer les solutions, lorsqu'elles existent.