Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
F 02 – Semestre 1

Interrogation du 6/05/2002

corrigé

Exercice I

1. Le réel e est un équilibre si et seulement si

$$e = e + e \ \exp e$$

c'ést-à-dire

$$e \ \exp e = 0$$

c'ést-à-dire $e = 0$.

2. Soit f définie par $f(x) = x + x \exp x$. Cette fonction est dérivable comme somme d'une fonction dérivable et d'un produit de fonctions dérivables. On a

$$f'(x) = 1 + (1 + x) \exp x$$

Donc $f'(0) = 2 > 1$ ainsi 0 est un équilibre instable.

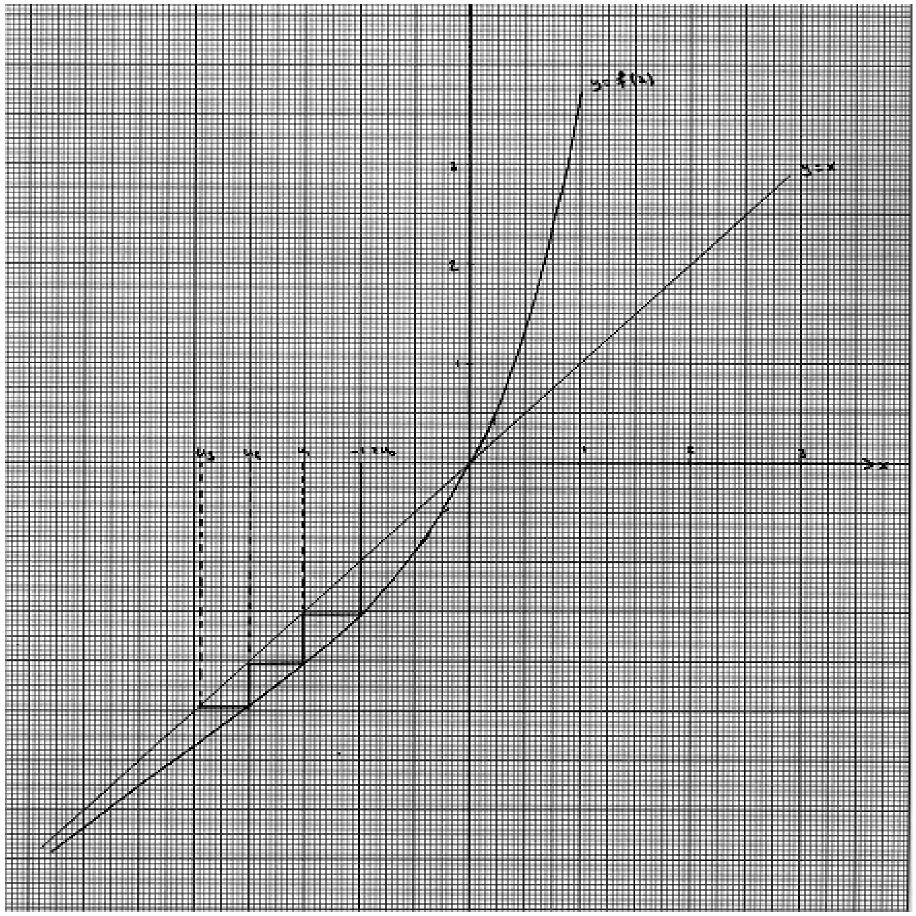
3. La fonction f' est dérivable comme somme d'une fonction dérivable et d'un produit de fonctions dérivables. On a

$$f''(x) = (2 + x) \exp x$$

ainsi f' est décrissante sur $]-\infty, -2]$ et croissante sur $[-2, +\infty[$, elle admet donc comme minimum la valeur $f'(-2) = 1 - e^{-2}$. Comme $e > 2$ on a $e^{-2} < \frac{1}{4}$ donc $f'(-2) > \frac{3}{4}$. Ainsi $f'(x) \geq f'(2) > 0$ donc f est croissante.

On a $\lim_{x \to -\infty} x \exp x = 0$ donc $\lim f(x) - x = 0$ par suite la droite déquation $y = x$ est asymptote à f en $-\infty$

4. Le graphe donne $u_3 = -2.4$, la valeur réelle est -2.02 soit une erreur de 20% environ.



Exercice II

Considérons le polynoôme caractérisitique $r^2 - 3r + 2 = 0$ il a deux racines qui sont 1 et 2 donc il existe deux constantes a et b telles que

$$u_n = a1^n + b2^n = a + b2^n$$

Comme $0 = u_0 = a + b$ et $1 = u + 1 = a + 2b$ il vient $a = -1$ et $b = 1$. Par suite

$$u_n = 2^n - 1$$

Exercice III

1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite. Donc

$$l = \frac{al + b}{cl + d}$$

ainsi

$$cl^2 + (d - a)l - b = 0 \tag{1}$$

2. Notons (H_n) l'hypothèse $u_n = u_0$. Raisonnons par récurrence.

- (H_0) est vraie.
- Supposons (H_n) vraie Si $x \in \{\alpha, \beta\}$ alors $f(x) = x$. Comme $u_n = u_0 \in \{\alpha, \beta\}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = u_n = u_0$. Donc (H_{n+1}) est vraie.

3. Soit X et Y deux réels distincs, on a

$$\begin{aligned} f(X) - f(Y) &= \frac{aX+b}{cX+d} - \frac{aY+b}{cY+d} \\ &= \frac{(X-Y)(ad-bc)}{(cX+d)(cY+d)} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\beta}{u_{n+1}-\alpha} \\ &= \frac{f(u_n)-f(\beta)}{f(u_n)-f(\alpha)} \\ &= \frac{\frac{(u_n-\beta)(ad-bc)}{(cu_n+d)(c\beta+d)}}{\frac{(u_n-\alpha)(ad-bc)}{(cu_n+d)(c\alpha+d)}} \\ &= \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha} \\ &= qU_n \end{aligned}$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.

4. Puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}$ et de premier terme $U_0 = \frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}$ on a

$$U_n = \frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n$$

Par définition de U_n on a $U_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$ donc $U_n(u_n-\alpha) = u_n-\beta$ ce qui donne $u_n(U_n-1) = \alpha U_n - \beta$ d'où $u_n = \frac{\alpha U_n-\beta}{U_n-1}$. Il est à noter que pour tout entier n on a $U_n \neq 1$ sans quoi on aurait $\alpha = \beta$. Ainsi

$$u_n = \frac{\alpha U_n - \beta}{U_n - 1}$$

Ainsi on obtient

$$u_n = \frac{\alpha\frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n - \beta}{\frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n - 1}$$