

Interrogation du 6/05/2002

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Ce sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Toutes vos réponses doivent être justifiées à l'exception de la question 4 de l'exercice I.

Exercice I (8 points)

On considère la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_n \exp u_n$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation ?
2. Pour chaque équilibre dites s'il est localement stable ou instable.
3. Montrer que $x \mapsto x + x \exp(x)$ est strictement croissante et qu'elle admet la première bissectrice ($y = x$) comme asymptote en $-\infty$.
4. Au moyen d'un graphe, que vous réaliserez sur le papier millimétré joint, déterminez approximativement la valeur des 3 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = -1$.

Exercice II (4 points)

Dérécursiver la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} \end{cases}$$

Exercice III (8 points)

Soient a, b, c et d quatre réels tels que $ad \neq bc$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \end{cases}$$

On supposera u_0 choisi de manière à ce que cette suite soit bien définie.

1. Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ alors

$$cl^2 + (d - a)l - b = 0 \tag{1}$$

On note $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$. Dans les questions suivantes, on suppose que $\Delta > 0$.

2. Soient α et β les deux racines de (1). Montrer que si $u_0 \in \{\alpha, \beta\}$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

3. On suppose $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$, et on pose

$$U_n = \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha} \quad \text{et} \quad q = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d}$$

montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q .

4. En déduire le terme général de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.