Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
F 02 – Semestre 1

Interrogation du 10/04/2002

Corrigé

Exercice I

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) est de Cauchy il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous enties p et q tels que $q > p > N_1$ on ait $|u_q - u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Comme (v_n) est de Cauchy il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous entiers p et q tels que $q > p > N_2$ on ait $|u_q - u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors $q > p > N$ implique

$$|(u_q + v_q) - (u_p + v_p)| = |(u_q - u_p) + (v_q - v_p)| \leq |u_q - u_p| + |v_q - v_p| < \varepsilon$$

donc $(u_n + v_n)$ est de Cauchy.

Exercice II

Soit $A \in \mathbb{R}$.

- Si $A \leq 0$ alors $e^{2n+1} > A$ est toujours vrai puisque $e^{2n+1} > 0$. Posons alors $N = 0$.
- Sinon $A > 0$ posons alors $N = \mathrm{E}(\frac{\ln(A)-1}{2}) + 1$ (ou 0 si cette quantité est négative) alors $n > N$ entraine les 3 lignes suivantes

$$n > \frac{\ln(A) - 1}{2}$$

$$2n + 1 > \ln A$$

$$e^{2n+1} > A$$

donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow e^{2n+1} > A$ ce qui montre que $\lim e^{2n+1} = +\infty$.

Exercice III

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{n} > 0$ donc $u_n > -1$ ainsi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est minoré par -1.

Supposons qu'il existe un minorant $m > -1$ de cet ensemble. Soit n un entier impair supérieur à $\frac{1}{m+1}$ alors $\frac{1}{n} - 1 < m$ donc $u_n < m$ ce qui est en contradiction avec le fait que m est un minorant.

Par suite -1 est le plus grand des minorants de $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ c'est donc la borne inférieure de cet ensemble.

Il n'y a pas de plus petit élément car $-1 \notin \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice IV

On considère $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit f la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}$$

Comme $\sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$ et que le dénominateur est strictement positif, il vient $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $[2, +\infty[$ ainsi (u_n) est décroissante des $n \geq 2$. D'autre part $u_1 = \sqrt{2} > \sqrt{3} - 1$ donc (u_n) est décroissante.

2. On a $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n-1}$ donc $u_n \geq 0$, comme la suite est en outre décroissante, elle est convergente.

3. Soit (H_n) l'hypothèse $v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$.

- (H_1) est vraie puisque $\sqrt{2} = v_1 = \sqrt{2} + \sqrt{1} - 1$.
- Supposons que (H_n) soit vraie alors $v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$ alors $v_n + u_{n+1} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1 + \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ donc $v_{n+1} = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 1$. donc (H_{n+1}) est vraie.

4. Soit (H_n) l'hypothèse $u_1 + \ldots + u_n = v_n$

- (H_1) est vraie puisque $u_1 = \sqrt{2} = v_1$
- Supposons que (H_n) soit vraie alors $u_1 + \ldots + u_n = v_n$ alors $u_1 + \ldots + u_n + u_{n+1} = v_n + u_{n+1} = v_{n+1}$ donc (H_{n+1}) est vraie.

Ainsi $u_1 + \cdots + u_n = v_n$ or $\lim v_n = +\infty$ donc $\lim(u_1 + \ldots + u_n) = +\infty$.

5. On a

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{w_n} &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{1/n}} \\ &= \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{1/n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1/n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}} \end{aligned}$$

or $\lim(\sqrt{1+1/n} + \sqrt{1-1/n}) = 2$ donc $\lim \frac{u_n}{w_n} = 1$ donc $(u_n) \sim (w_n)$.