Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
F 02 – Semestre 1

Interrogation du 10/04/2002

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice I (4 points)

En utilisant la définition des suites de Cauchy démontrez que la somme de deux suites de Cauchy est une suite de Cauchy.

Exercice II (4 points)

En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim e^{2n+1} = +\infty$$

Exercice III (4 points)

Pour $n \geq 1$ on considère

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

L'ensemble $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est-il minoré ? Admet-il une borne inférieure ? Admet-il un plus petit élément ?

Exercice IV (8 points)

On considère $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle croissante ?

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_1 = \sqrt{2}$ et $v_{n+1} = v_n + u_{n+1}$ pour $n \geq 1$. Montrer par récurrence que

$$v_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - 1$$

4. En déduire $\lim(u_1 + \cdots + u_n)$.

5. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \sqrt{1/n}$ est-elle équivalent à (u_n) ?