Examen du 25/6/2002

Correction

Exercice I

1. Les points d'équilibre de la relation vérifient l'équation $f(x) = x$ avec $f(x) = 2x - 5$, c'est-à-dire

$$x = 2x - 5$$

Donc 5 est l'unique point d'équilibre de la relation. On a $f'(x) = 2 \; \forall x \in \mathbb{R}$, et $f'(5) = 2 > 1$, donc 5 n'est pas un équilibre stable de la relation.

2. Soit α un réel et $(v_n)_{n\in\mathbb{R}}$ la suite

$$v_n = u_n - \alpha$$

on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha \\ &= 2u_n - 5 - \alpha \\ &= 2(v_n + \alpha) - 5 - \alpha \\ &= 2v_n + \alpha - 5 \end{aligned}$$

En posant $\alpha = 5$, la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -5$ et de raison 2. Il vient $v_n = -5 \times 2^n$ donc

$$u_n = 5 - 5 \times 2^n$$

Exercice II

1. Une intersection de compacts est compacte car une intersection de fermés (resp. de bornés) est fermée (resp. bornée).

2. Une réunion finie de compacts est compacte car une réunion finie de fermés (resp. de bornés) est fermée (resp. bornée).

Une réunion infinie de compacts n'est pas toujours compacte car une réunion infinie de fermés (resp. de bornés) n'est pas toujours fermée (resp. bornée), par exemple $\mathbb{Z}$ qui n'est pas compact est une réunion de compacts.

Exercice III

1. Voir figure 1

2. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[\not\subset A$ donc A n'est pas voisinage de 2, par suite A n'est pas ouvert.

3. De la même manière A n'est pas voisinage de 1 et des $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $]1,2[$ est le plus grand ouvert inclus dans A donc $\mathring{A} =]1,2[$.

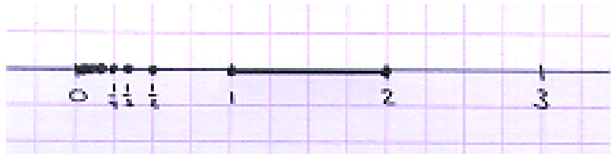

Figure 1: L'ensemble A

4. Soit $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est une suite convergente d'éléments de A qui ne converge pas dans A donc A n'est pas fermé.

5. L'ensemble $\{0\} \cup A$ est un fermé puisque son complémentaire est

$$]-\infty, 0[\cup \left(\cup_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\right) \cup]2, +\infty[$$

qui est ouvert puisque réunion d'intervalles ouverts. Ainsi $\{0\} \cup A$ est un fermé et c'est le plus petit fermé contenant A donc

$$\overline{A} = \{0\} \cup A$$

6. $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{0; 1; 2\}$

Exercice IV

1. Remarquons que $x \notin A \Rightarrow x \notin A_\varepsilon$.

On a $A \cap]8-5, 8+5[= \{4; 8\} \neq \{8\}$ de même $A \cap]4-5, 4+5[\neq \{4\}$ et $A \cap]x-5, x+5[\neq \{x\}$ pour tout $x \in [0; 2]$. Ainsi $A_5 = \emptyset$.

De manière analogue $A_1 = A_{\frac{1}{100}} = \{4; 8\}$.

2. Soit $x \in A_{\frac{1}{n}}$ alors il existe $\varepsilon > 0$ (égal à $\frac{1}{n}$) tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \{x\}$ donc $x \in A^*$. Ainsi

$$A_{\frac{1}{n}} \subset A^*$$

3. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{\frac{1}{n}} \subset A^*$ on a

$$\cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}} \subset A^*$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in A^*$ alors $\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A = \{x\}$ soit $n = \mathrm{E}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ alors $x \in A_{\frac{1}{n}}$ ainsi $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}}$ par suite $x \in \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}}$ donc

$$A^* \subset \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}}$$

4. Soit x et y dans $A_{\frac{1}{n}}$ alors $A \cap]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[= \{x\}$. Si $x \neq y$ alors $y \notin]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ donc $|y-x| \geq \frac{1}{n}$.

5. Il résulte de la question précédente que la distance entre chaque élément de $A_{\frac{1}{n}}$ est au moins $\frac{1}{n}$. Donc

$$A_{\frac{1}{n}} = \cup_{m\in\mathbb{Z}}(A_{\frac{1}{n}} \cap [m, m + \frac{1}{n}[)$$

Comme $A_{\frac{1}{n}} \cap [m, m + \frac{1}{n}[$ contient au plus un élément il existe une injection de $A_{\frac{1}{n}}$ dans $\mathbb{Z}$ donc $A_{\frac{1}{n}}$ est fini ou dénombrable.

Or $A' = \emptyset$ donc $\overline{A} = A^*$, or $A^* \subset A \subset \overline{A}$ donc $A = A^*$, par suite

$$A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}}$$

$$A = \cup_{n\in\mathbb{N}^*} \cup_{m\in\mathbb{Z}} (A_{\frac{1}{n}} \cap [m, m + \frac{1}{n}[)$$

$$A = \cup_{(n,m)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}}(A_{\frac{1}{n}} \cap [m, m + \frac{1}{n}[)$$

Comme $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ est dénombrable on en déduit et que $A_{\frac{1}{n}} \cap [m, m + \frac{1}{n}[$ est fini ou vide, on déduit que A est fini ou dénombrable. Comme il est infini, l'ensemble A est dénombrable.