Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

Année 2001-2002
F 02 – Semestre 1

Examen du 25/6/2002

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées sauf pour la question 1 de l'exercice III. La question 5 de l'exercice IV est plus difficile, il est recommandé de la traiter en dernier.

Exercice I (4 points)

On considère la relation récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n - 5$$

1. Trouver le(s) équilibre(s) de cette relation, et en préciser la nature.

2. Donner le terme général de la suite issue de la condition initiale $u_0 = 0$.

Exercice II (4 points)

1. L'intersection d'ensembles compacts est-il un ensemble compact ?

2. La réunion d'ensembles compacts est-il un ensemble compact ?

Exercice III (6 points)

On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup [1, 2]$$

1. Représenter A graphiquement.

2. L'ensemble A est-il ouvert ?

3. Calculer $\mathring{A}$

4. L'ensemble A est-il fermé ?

5. Calculer $\overline{A}$

6. Que vaut ∂A ?

Exercice IV (6 points)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Pour tout $\varepsilon > 0$ nous noterons A_ε l'ensemble des réels x tels que $A \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \{x\}$.

1. Pour $A = [0;2] \cup \{4;8\}$ déterminer les ensembles A_5, A_1 et $A_{\frac{1}{100}}$. (Dans les questions suivantes on considérera un ensemble A quelconque).

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_{\frac{1}{n}} \subset A^*$

3. Montrer que

$$A^* = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{\frac{1}{n}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout x et y distincts dans $A_{\frac{1}{n}}$, on a $|y-x| \geq \frac{1}{n}$.

5. En déduire qu'un ensemble infini sans point d'accumulation est nécessairement dénombrable.