Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I | F 02 – Semestre 1

Devoir 2

correction

Exercice I

1. Si $d = 0$ alors $c \neq 0$ sans quoi la suite n'est pas définie, donc $d = 0$. Ainsi $u_{n+1} = \frac{a}{c}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On se place desormais dans le cas où $d \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{au_n + b}{cu_n + d} &= \frac{adu_n + bd}{d(cu_n + d)} \\ &= \frac{bcu_n + bd}{d(cu_n + d)} \\ &= \frac{b}{d}\frac{cu_n + d}{cu_n + d} \\ &= \frac{b}{d} \end{aligned}$$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = b$ ce qui équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = b$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien constante dès son second terme.

2. On a

$$u_{n+1} = \frac{a}{d}u_n + \frac{b}{d}$$

a . Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas arithmétique alors $a \neq d$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{a}{d}u_n + \frac{b}{d} + \alpha \\ &= \frac{a}{d}(v_n - \alpha) + \frac{b}{d} + \alpha \\ &= \frac{a}{d}v_n - \frac{a}{d}\alpha + \frac{b}{d} + \alpha \end{aligned}$$

Il suffit de poser $\alpha = \frac{b}{a-d}$ pour avoir $v_{n+1} = \frac{a}{d}v_n$.

b .

Premier cas : $a = d$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{b}{d}$ ainsi

$$u_n = u_0 + n\frac{b}{d}$$

Deuxième cas : $a \neq d$, la question précédente donne

$$u_n = v_n - \frac{b}{a-d}$$

avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique de raison $\frac{a}{d}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + \frac{b}{a-d}$. Ainsi

$$v_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-d}\right)\left(\frac{b}{a-d}\right)^n$$

donc

$$u_n = \left(u_0 + \frac{b}{a-d}\right)\left(\frac{b}{a-d}\right)^n - \frac{b}{a-d}$$

c .

Monotonie :

Premier cas : $a = d$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si $\frac{b}{d} \geq 0$ et décroissante si $\frac{b}{d} \leq 0$.

Deuxième cas : $a \neq d$, alors

- Si $\frac{b}{a-d} < 0$, la suite n'est pas monotone
- Si $\frac{b}{a-d} \in [0,1]$, la suite est croissante si $u_0 + \frac{b}{a-d} \leq 0$ et décroissante si $u_0 + \frac{b}{a-d} \geq 0$
- Si $\frac{b}{a-d} > 1$, la suite est décroissante si $u_0 + \frac{b}{a-d} \leq 0$ et croissante si $u_0 + \frac{b}{a-d} \geq 0$

Limite :

Premier cas : $a = d$, alors $\lim u_n = +\infty$ si $\frac{b}{d} \geq 0$ et $\lim u_n = -\infty$ si $\frac{b}{d} \leq 0$.

Deuxième cas : $a \neq d$, alors

- Si $\frac{b}{a-d} \leq -1$, la suite n'a pas de limite
- Si $\frac{b}{a-d} \in]-1,1[$, la suite converge vers $-\frac{b}{a-d}$
- Si $\frac{b}{a-d} = 1$, la suite converge vers u_0.
- Si $\frac{b}{a-d} > 1$, la suite tend vers $+\infty$ si $u_0 + \frac{b}{a-d} > 0$, vers $-\infty$ si $u_0 + \frac{b}{a-d} \geq 0$ et vers $-\frac{b}{a-d}$ si $u_0 + \frac{b}{a-d} = 0$.

Exercice II

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$$

Comme $ad - bc \neq 0$ la dérivée est soit strictement positive, soit strictement négative. La fonction f est donc strictement monotone.

En outre $\lim_{x\to(-\frac{d}{c})^+} = +\infty$ et $\lim_{x\to(-\frac{d}{c})^-} = -\infty$ ou le contraire. Comme

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a}{c}$$

il vient $f(]-\infty, -\frac{d}{c}[) =]\frac{a}{c}, +\infty[$ et $f\left(\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[\right) = \left]-\infty, \frac{a}{c}\right[$ ou le contraire. Donc

$$f(\mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{d}\}) = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$$

La fonction f est continue, strictement monotone et l'image de l'ensemble de départ est l'ensemble d'arrivée, donc f est une bijection.

2. On note
$$f^{[n]} = f \underbrace{\circ \ldots \circ}_{n} f$$
Soit

i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie

ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \neq v_n$

Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$. Comme la suite est définie, en particulier pour tout n le terme u_{n+1} est défini donc $f^{(n)}(u_0) = u_n \neq -\frac{d}{c}$ ainsi
$$u_n \neq (f^{-1})^{[n]}\left(-\frac{d}{c}\right)$$
donc $u_0 \neq v_n$.

Montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$. Pour tout n, on a $u_{n-1} \neq (f^{-1})^{[n-1]}\left(-\frac{d}{c}\right)$ donc u_n est définie. Comme tous les termes sont définis, la suite est définie.

3. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite. Donc
$$l = \frac{al+b}{cl+d}$$
ainsi
$$cl^2 + (d-a)l - b = 0 \tag{1}$$

4.

a . Notons (H_n) l'hypothèse $u_n = u_0$. Raisonnons par récurrence.

- (H_0) est vraie.
- Supposons (H_n) vraie Si $x \in \{\alpha, \beta\}$ alors $f(x) = x$. Comme $u_n = u_0 \in \{\alpha, \beta\}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) = u_n = u_0$. Donc (H_{n+1}) est vraie.

b . Soit X et Y deux réels distincs, on a
$$\begin{aligned} f(X) - f(Y) &= \frac{aX+b}{cX+d} - \frac{aY+b}{cY+d} \\ &= \frac{(X-Y)(ad-bc)}{(cX+d)(cY+d)} \end{aligned}$$
On a alors
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\beta}{u_{n+1}-\alpha} \\ &= \frac{f(u_n)-f(\beta)}{f(u_n)-f(\alpha)} \\ &= \frac{\frac{(u_n-\beta)(ad-bc)}{(cu_n+d)(c\beta+d)}}{\frac{(u_n-\alpha)(ad-bc)}{(cu_n+d)(c\alpha+d)}} \\ &= \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha} \\ &= qU_n \end{aligned}$$
Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.

c . Puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{c\alpha+d}{c\beta+d}$ et de premier terme $U_0 = \frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}$ on a

$$U_n = \frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n$$

Par définition de U_n on a $U_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$ donc $U_n(u_n-\alpha) = u_n-\beta$ ce qui donne $u_n(U_n-1) = \alpha U_n-\beta$ d'où $u_n = \frac{\alpha U_n-\beta}{U_n-1}$. Il est à noter que pour tout entier n on a $U_n \neq 1$ sans quoi on aurait $\alpha = \beta$. Ainsi

$$u_n = \frac{\alpha U_n-\beta}{U_n-1}$$

Ainsi on obtient

$$u_n = \frac{\alpha\frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n-\beta}{\frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}\left(\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\right)^n-1}$$

5.

a . Notons (H_n) l'hypothèse $u_n = u_0$. Raisonnons par récurrence.

- (H_0) est vraie.
- Supposons (H_n) vraie Si $x=\alpha$ alors $f(x)=x$. Comme $u_n=u_0=\alpha$ alors $u_{n+1}=f(u_n)=u_n=u_0$. Donc (H_{n+1}) est vraie.

b . Soit X et Y deux réels distincs, on a montré que

$$f(X)-f(Y) = \frac{(X-Y)(ad-bc)}{(cX+d)(cY+d)}$$

or $U_{n+1} = \frac{1}{f(u_n)-f(\alpha)}$ donc

$$U_{n+1} = \frac{(cu_n+d)(c\alpha+d)}{(u_n-\alpha)(ad-bc)}$$

or $\Delta = 0$ donc $(d-a)^2-4bc = 0$ donc $(d+a)^2 = 4bc-4ad$ ainsi $(d+a)^2 \neq 0$ et

$$\frac{1}{ad-bc} = \frac{4}{(d+a)^2}$$

en conséquence

$$U_{n+1} = 4\frac{c\alpha+d}{(d+a)^2}\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}$$

d'autre part $c \neq 0$ sans quoi $ad = 0$ ce qui est impossible donc $\alpha = \frac{a-d}{2c}$ donc $c\alpha+d = \frac{a+d}{2}$ ainsi

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= \frac{2}{d+a}\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}\\
&= \frac{2}{d+a}\frac{cu_n-c\alpha+c\alpha+d}{u_n-\alpha}\\
&= \frac{2}{d+a}\left(c+\frac{c\alpha+d}{u_n-\alpha}\right)\\
&= \frac{2}{d+a}\left(c+\frac{\frac{a+d}{2}}{u_n-\alpha}\right)\\
&= \frac{2c}{d+a}+\frac{1}{u_n-\alpha}\\
&= U_n+r
\end{aligned}$$

Donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r.

c . Puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = \frac{2c}{a+d}$ et de premier terme $U_0 = \frac{1}{u_0-\alpha}$ on a

$$U_n = \frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{2nc}{a+d}$$

or $u_n = \alpha + \frac{1}{U_n}$ donc

$$u_n = \alpha + \frac{1}{\frac{1}{u_0-\alpha} + \frac{2nc}{a+d}}$$

6. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite réelle l. Alors, par la question 3 on a l racine de $cX^2 + d(d-a)X - b = 0$ donc le discriminant Δ de ce polynôme est positif ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas (sa limite est infinie ou bien elle n'a pas de limite)

Exercice III

1. Dans cette question on a $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 2$ donc $\Delta = -3 < 0$. La question 6 de l'exercice II nous permet de conclure que la suite ne converge pas. On pourrait aussi utiliser la question 2 de l'exercice II pour montrer que cette suite n'est pas définie.

2. Dans cette question on a $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$ donc $\Delta = 1 > 0$. On a $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. La question 4b de l'exericice II donne

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

qui tend vers 0.

3. Dans cette question on a $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$ donc $\Delta = 0$. On a $\alpha = 0$. La question 5b de l'exerice II donne

$$u_n = \frac{1}{1+n}$$

dont la limite est 0.