Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Devoir 1

correction

1. Soit $C = [1,2] + [-1,5]$ et $D = [1,2]\,[-1,5]$.

Montrons que $C = [0,7]$**.** $x \in C$ équivaut à $\exists a \in [1,2],\ \exists b \in [-1,5],$ t.q $x = a + b$.

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \leq & a & \leq & 2 \\ -1 & \leq & b & \leq & 5 \end{array}$$

ce qui donne $0 \leq a + b \leq 7$, c'est-à-dire $x \in [0,7]$.

Montrons que $D = [-2,10]$**.** Soit $x \in D$, on a $x = ab$ avec

$$\begin{array}{rcccl} 1 & \leq & a & \leq & 2 \\ -1 & \leq & b & \leq & 5 \end{array}$$

En multipliant membre à membre $a \leq 2$ et $b \leq 5$ il vient $ab \leq 10$. En outre on a $a \leq 2$ et $-1 \leq b$ ainsi $-b \leq 1$ donc en multipliant membre à membre il vient $-ab \leq 2$ d'où $-2 \leq ab$. En conséquence

$$-2 \quad \leq \quad ab \quad \leq \quad 10$$

c'est-à-dire $x \in [-2,10]$

2.

La fonction f **:**

Injectivité. La fonction f n'est pas injective comme le montre le contre exemple suivant : $A = [1,2]$, $B = [-1,5]$, $f(2,0) = 2 = f(1,1)$ alors que $(2,0) \neq (1,1)$.

Surjectivité. Soit $x \in A + B$ alors, par définition de $A + B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$ donc $x = f(a,b)$. Ainsi f Est surjective.

Bijectivité. Comme f n'est pas injective, elle n'est pas bijective.

La fonction g **:**

Injectivité. La fonction f n'est pas injective comme le montre le contre exemple suivant : $A = [1,2]$, $B = [-1,5]$, $g(2, \frac{1}{2}) = 1 = g(1,1)$ alors que $(2, \frac{1}{2}) \neq (1,1)$.

Surjectivité. La fonction f n'est pas surjective comme le montre le contre exemple suivant : $A = [-1,0]$, $B = [2,3]$, $A + B = [1,3]$. L'élément $1 \in A + B$ ne peut pas s'écrire ab avec $a \in A$ et $b \in B$ car ab est toujours négatif.

Bijectivité. Comme g n'est pas injective (ou pas surjective), elle n'est pas bijective.

3. La somme $A+B$ ne pose aucun problème, il suffit de reprendre la question 1 en remplacant 1 par a, 2 par α, -1 par b et 2 par β, il vient

$$A+B=[a+\alpha, b+\beta]$$

4. Les trois égalités

$$A+B=B+A$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$
$$A+[0;0]=A$$

résultent respectivement de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$, de son associativité et du fait que 0 est élément neutre de $(\mathbb{R},+)$.

5. on distingue 9 cas, en effet on distingue

- $0<a$
- $0\in[a,\alpha]$
- $\alpha<0$

qui se conjugue avec

- $0<b$
- $0\in[b,\beta]$
- $\beta<0$

Pour chacun de ces cas on procède de manière analogue à la question 1. En regroupant tous les cas on obtient finalement

$$AB=[\min\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\},\max\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}]$$

6. Soit A, B et C trois élélemnts de $\mathcal{S}$. On a

$$\begin{aligned} AB &= [\min\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\},\max\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}] \\ &= [\min\{ba,b\alpha,\beta a,\beta\alpha\},\max\{ba,b\alpha,\beta a,\beta\alpha\}] \\ &= BA \end{aligned}$$

D'autre part $(AB)C$ est égal à

$$[\min\{\min\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}c,\min\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}\gamma,\max\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}c,\max\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}\gamma\},$$

$$\max\{\min\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}c,\min\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}\gamma,\max\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}c,\max\{ab,a\beta,\alpha b,\alpha\beta\}\gamma\}]$$

donc $(AB)C$ est égal à

$$[\min\{abc,a\beta c,\alpha bc,\alpha\beta c,ab\gamma,a\beta\gamma,\alpha b\gamma,\alpha\beta\gamma\},\max\{abc,a\beta c,\alpha bc,\alpha\beta c,ab\gamma,a\beta\gamma,\alpha b\gamma,\alpha\beta\gamma\}]$$

comme la multiplication est commutative dans $\mathbb{R}$, il vient $(AB)C=A(BC)$.
Enfin $A[1;1]=[\min\{a,\alpha\},\max\{a,\alpha\}]=A$.

7. Si $AB = [0;0]$ alors

$$\min\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\} = 0 \tag{1}$$

$$\max\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\} = 0 \tag{2}$$

Ainsi (1) implique que a, b, α et β sont du même signe. Ainsi (2) entraine $ab = 0$ et $a\beta = 0$ et $\alpha b = 0$ et $\alpha\beta = 0$. Si $a \neq 0$ alors $b = 0$ et $\beta = 0$ donc $B = [0;0]$ Si $b \neq 0$ alors $a = 0$ et $\alpha = 0$ donc $A = [0;0]$

8. Soit $A = [a, \alpha]$, $B = [b, \beta]$ et $C = [c, \gamma]$ trois élélemnts de $\mathcal{S}$ on a

$$A(B+C) = [\min\{a(b+c), a(\beta+\gamma), \alpha(b+c), \alpha(\beta+\gamma)\}, \max\{a(b+c), a(\beta+\gamma), \alpha(b+c), \alpha(\beta+\gamma)\}]$$

$$= [\min\{ab+ac, a\beta+a\gamma, \alpha b+\alpha c, \alpha\beta+\alpha\gamma\} \max\{ab+ac, a\beta+a\gamma, \alpha b+\alpha c, \alpha\beta+\alpha\gamma\}$$

d'autre part

$$AB = [\min\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\}, \max\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\}]$$

$$AC = [\min\{ac, a\gamma, \alpha c, \alpha\gamma\}, \max\{ac, a\gamma, \alpha c, \alpha\gamma\}]$$

donc $(AB) + (AC)$ est égal à

$$[\min\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\} + \min\{ac, a\gamma, \alpha c, \alpha\gamma\}, \max\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\} + \max\{ac, a\gamma, \alpha c, \alpha\gamma\}]$$

Or $\min\{m + m', n\} \geq \min\{m, n\} + \min\{m', n\}$ (et on a inégalité stricte, par exemple lorsque $m = 5$, $m' = -1$ et $n = 3$) ainsi

$$\min\{ab+ac, a\beta+a\gamma, \alpha b+\alpha c, \alpha\beta+\alpha\gamma) \geq \min\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\} + \min\{ac, a\gamma, \alpha c, \alpha\gamma\}$$

de la mème manière

$$\max\{ab+ac, a\beta+a\gamma, \alpha b+\alpha c, \alpha\beta+\alpha\gamma) \leq \max\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\} + \min\{ac, a\gamma, \alpha c, \alpha\gamma\}$$

donc $A(B+C) \subset (AB) + (AC)$.

L'inclusion est stricte, par exemple, lorsque $A = [1, 2]$, $B = [-1, 5]$ et $C = [1, 5]$. En effet

$$\begin{aligned} AB &= [-2, 10] \\ AC &= [1, 10] \\ (AB) + (AC) &= [-1, 20] \\ B + C &= [1, 10] \\ A(B+C) &= [0, 20] \end{aligned}$$

9. Notons $X = [b, \beta]$, alors $[2;3]X = [-1;2]$ équivaut à

$$\begin{cases} \min\{2b, 2\beta, 3b, 3\beta\} = -1 \\ \max\{2b, 2\beta, 3b, 3\beta\} = 2 \end{cases}$$

Comme $b < \beta$, il y a équivalence avec

$$\begin{cases} \min\{2b, 3b\} = -1 \\ \max\{2\beta, 3\beta\} = 2 \end{cases}$$

comme b doit être négatif et β positif, cela équivaut à

$$\begin{cases} b = -1/3 \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

ce qui éqauivaut à $X = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.