Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Devoir 1

A rendre le 5/03/02

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire de la forme $[x, y]$ avec x et y réels tels que $x \leq y$. Pour deux éléments A et B de $\mathcal{S}$ on note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$

$$AB = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = ab\}$$

1. Que vaut $[1, 2] + [-1, 5]$ et $[1, 2]\,[-1, 5]$?

2. Soit A et B dans $\mathcal{S}$. Les applications f et g définies par

$$\begin{array}{rccc} f\ : & A \times B & \to & A + B \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g\ : & A \times B & \to & AB \\ & (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

3. Si $A = [a, \alpha]$ et $B = [b, \beta]$ montrer que $A + B$ est un intervalle fermé et borné et trouver les bornes de cet intervalle.

4. Soit A, B et C trois élélemnts de $\mathcal{S}$ montrer que $A+B = B+A$, que $(A+B)+C = A+(B+C)$ et que $A + [0; 0] = A$.

5. Si $A = [a, \alpha]$ et $B = [b, \beta]$ montrer que AB est un intervalle fermé et borné, montrer que

$$AB = [\min\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\}, \max\{ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta\}]$$

6. Soit A, B et C trois élélemnts de $\mathcal{S}$; montrer que $AB = BA$, que $(AB)C = A(BC)$ et que $A[1; 1] = A$.

7. Soit A et B dans $\mathcal{S}$. Montrer que si $AB = [0; 0]$ alors $A = [0; 0]$ ou $B = [0; 0]$.

8. Soit A, B et C trois élélemnts de $\mathcal{S}$ montrer que $A(B + C) \subset (AB) + (AC)$. Donner un exemple où cette inclusion est stricte et un exemple ou il y a égalité.

9. Trouver $X \in \mathcal{S}$ tel que $[2; 3]X = [-1; 2]$.