

Feuille d'exercices 7

Compacité

Exercice I

Pour chacun des ensembles A suivants, et des recouvrements $(\Omega_i)_{i \in I}$ dites s'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini.

1. $A =]-1, 1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i} - 1, 1 - \frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$
2. $A = [-1, 1]$, $\Omega_i =]-\frac{1}{i} - 1, 1 + \frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$
3. $A = \mathbb{R}$, $\Omega_i =]-i, i[$, $I = \mathbb{N}^*$

Exercice II

Soit $A = [1, 2[\cup \{3\}$

1. Calculer $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} , ∂A , A^* et A'
2. L'ensemble A est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-ce un compact ?
3. Trouver un recouvrement de A par des ouverts dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.

Exercice III

1. Soit (u_n) une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \frac{5}{6} \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{6}u_{n-1} \end{cases}$$

- a . Donner le terme général de (u_n)
 - b . Montrer que $\lim u_n = 0$
 - c . La suite est-elle croissante ? Décroissante ? Non monotone ?
2. On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

- a . L'ensemble A est-il ouvert ?
- b . L'ensemble A est-il fermé ?
- c . Expliciter un recouvrement de A par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini.
- d . L'ensemble A est-il compact ?