Feuille d'exercices 6

Adhérence, Intérieur, Frontière

Exercice I

Montrer que si $A \subset B$ alors

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

$$\overline{A} \subset \overline{B}$$

Les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice II

Comparer $\overset{\circ}{\overbrace{(A \cup B)}}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Même question pour $\overset{\circ}{\overbrace{(A \cap B)}}$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercice III

Comparer $\overline{(A \cup B)}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$. Même question pour $\overline{(A \cap B)}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice IV

Soit A une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$

1. Montrer que $\sup(\overline{A})$ existe et vaut $\sup(\overline{A})$

2. A-t-on un résultat analogue pour $\sup(\overset{\circ}{A})$?

Exercice V

Pour chacun des ensembles suivants, indiquez l'intérieur, l'adhérence et la frontière.

$$\begin{array}{lllllllll}
A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A \cup \{0\} & C & = &]0,1] \cup \{0;2;4\} \\
D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0] \cup \{-1;2\} \\
G & = & \mathbb{Z}\cup]-1,\infty] & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\\
J & = &]-1,0[\cup]0,1[& K & = & \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & L & = & \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}
\end{array}$$

Exercice VI

Montrer que pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est une partie fermée de $\mathbb{R}$.

Exercice VII

On note $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. De plus, on introduit α et β les applications définies de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad \left(\alpha(A) = \mathring{\overline{A}},\ \beta(A) = \overline{\mathring{A}}\right)$$

1. Montrer que $\alpha \circ \alpha = \alpha$ et $\beta \circ \beta = \beta$.

2. Que vaut $\alpha \circ \beta \circ \alpha$? Que vaut $\beta \circ \alpha \circ \beta$?

3. Donner un exemple d'ensemble A pour lequel

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

sont deux à deux distincts.

4. Démontrer que pour tout A, l'adhérence ou l'interieur de l'un des 8 ensembles ci-dessus est forcément l'un de ces ensembles.

Exercice VIII

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

1. Comparer $\partial(A \cup B)$ et $(\partial A) \cup (\partial B)$

2. Comparer $\partial(A \cap B)$ et $(\partial A) \cap (\partial B)$

Exercice IX

Soit $A \subset \mathbb{R}$

1. Que vaut l'adhérence de ∂A ?

2. Comparer $\partial(\mathring{A})$ et $\overset{\circ}{(\partial A)}$.

3. Comparer $\partial(\overline{A})$ et $\overline{(\partial A)}$.

4. A-t-on toujours $\partial(\partial A) = \emptyset$?

Exercice X

Quelle est l'adhérence de l'ensemble $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ n \in \mathbb{N}^*,\ m \in \mathbb{N}^*\}$?