Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Feuille d'exercices 5

Ouverts et Fermés

Exercice I

1. L'ensemble $[-1,0[\cup]0,1]$ est-il un voisinage de 0 ? Qu'en est-il de $[-1,1]$?

2. L'ensemble $[-1,1]$ est-il un voisinage de 1 ? Qu'en est-il de $[-1,1[$?

3. Soit $x \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il un voisinage de x ?

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il un voisinage de x ?

Exercice II

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un ouvert ou non.

$$\begin{array}{lllllllll}
A & = &]2,3[\cup\mathbb{R}_- & B & = & [1,3]\cup]4,5] & C & = &]-1,0[\cup]0,1[\\
D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup[\frac{2}{3},2] & F & = &]-\infty,0[\\
G & = & \mathbb{Z} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & [0,4[\cap]1,5[\\
J & = & \{1\} & K & = & \mathbb{Q} & L & = & \cap_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[
\end{array}$$

Exercice III

1. Soit A un ouvert majoré, montrer que A ne contient pas sa borne supérieure.
Donner un exemple.

2. Qu'en est-il de la borne supérieure d'un ensemble fermé ?

Exercice IV

Montrer que $\mathbb{R}$ a la propriété de Hausdorff

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ avec } x\neq y,\ \exists(V,W)\in\mathcal{V}(x)\times\mathcal{V}(y),\ V\cap W=\emptyset$$

Exercice V

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un fermé ou non.

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A\cup\{0\} & C & = &]0,1]\cup\{0;2;4\} \\ D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0]\cup\{-1;2\} \\ G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \left(\cap_{n=1}^{+\infty}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[\right)\cap\mathbb{R}^* \end{array}$$

Exercice VI

1. Montrer qu'une réunion finie d'ensembles fermés est fermée.

2. Que peut-on dire d'une intersection infinie d'ensembles fermés ?

3. Montrer qu'une réunion infinie d'ensembles ouverts est ouverte.

4. Que peut-on dire d'une intersection finie d'ensembles ouverts ?

Exercice VII

Considérons

$$E=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}\cup\left\{-\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Représenter graphiquement E

2. Cet ensemble est-il un fermé ?