Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Feuille d'exercices 4

Suites numériques récurrentes

Exercice I

On souhaite étudier la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall\, n \geq 0, u_n \in [0, +\infty[$.

2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit.

3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice II

Refaire l'exercice I avec la suite suivante:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a^2}{u_n}\right) \text{ où } a \in \mathbb{R}_+^* \text{est fixé} \end{cases}$$

Exercice III

Déterminer u_1 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

soit à termes positifs.

Exercice IV

On considére la relation de recurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$

1. Quels sont le ou les équilibres de cette relation ?

2. Pour chaque équilibre dites s'il est stable ou instable.

3. Au moyen d'un graphe, determinez la valeur des 4 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{2}$.

Exercice V

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2 \end{array} \right.$$

Discuter selon a le comportement de la suite.

Exercice VI

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_1 = \frac{5}{6} \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n - \frac{1}{6}u_{n-1} \end{array} \right.$$

1. Donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Montrer que $\lim u_n = 0$

3. La suite est-elle croissante ? Décroissante ? Non monotone ?