Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Feuille d'exercices 3

Suites numériques

Exercice I

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles majorées, minorées ou non bornées ?

1. $u_n = \dfrac{n^2+7}{n-1}$

2. $u_n = \dfrac{n}{n^4+1}$

3. $u_n = \dfrac{n^2-n}{1+n}$

4. $u_n = \sin(n)$

Exercice II

1. Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes vérifient le critère de Cauchy

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad u_n = \sqrt{n}$$

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $|u_n - v_n| \to 0$. Montrter que, si l'une des deux est de Cauchy, alors l'autre l'est aussi.

Exercice III

Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont croissantes, décroissantes, ou non-monotones.

1. $u_n = \cos(n)$

2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = e^{u_n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

3. $u_n = \frac{2^n(3n+1)}{n!}$

4. $u_n = (-1)^n\sqrt{n}$

Exercice IV

En utilisant la définition de la limite, dites si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes ont une limite.

1. $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^3}$

2. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k$

Exercice V

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 \in \mathbb{R}^* & & \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}(u_n+|u_n|) \end{array}\right.$$

est-elle convergente, et si oui quelle est sa limite ?

Exercice VI

Etudier la convergence et la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 \in \mathbb{R}_+^* & & \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, u_{n+1} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}. \end{array}\right.$$

Exercice VII

Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, dans les cas suivants.

1. $u_n = \dfrac{2^n}{n^2!}$

2. $u_n = \dfrac{5^n}{n^3}$

3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

4. $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

5. $u_n = \dfrac{n^2-n}{n^2+1}$

Exercice VIII

1. Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{n}{(\ln n)^2}$$

Montrer que cette suite est croissante des son 7e terme (c'est-à-dire pour $n \geq 8$).

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 8$ on a

$$n \geq (\ln n)^2$$

3. En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$$