Feuille d'exercices 2

Récurrence et notation somme

Exercice I

1. Montrer, par récurrence, que

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

2. Les sommes précédentes dépendent-elles de i ? de n ?

3. Que vallent les sommes suivantes ?

$$\sum_{j=1}^{n} i, \quad \sum_{j=1}^{n} j, \quad \sum_{t=1}^{n} t, \quad \sum_{t=1}^{n} t^2$$

Exercice II

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{2^m+1} - H_{2^m} \geq \frac{1}{2}$.

2. En dduire : $H_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$

Exercice III

Simplifier l'expression suivante

$$\sum_{i=1}^{p} u_{i+1} + 5 \sum_{k=3}^{p-2} u_{k-1} - 3 \sum_{n=0}^{p-1} (u_n + u_{n+2})$$

Exercice IV

Pour les suites suivantes, dont on donne le terme général, montrer la convergence et déterminer la limite :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

2. $u_1 = 1$; et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}}$