Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 103 – Analyse I — F 02 – Semestre 1

Feuille d'exercices 1

Notions de base

Exercice I

Les applications suivantes sont-elle injectives ? Sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \mapsto & 3^p(2q+1) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (p,q) & \mapsto & 3^p(2q+1) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q,r) & \mapsto & 2^p3^q4^r \end{array} \qquad i : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q,r) & \mapsto & 2^p3^q5^r \end{array}$$

Exercice II

On considère l'application:

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (\ p\ ,\ q\ ) & \mapsto & p+2q \end{array}$$

1. φ est-elle injective ?

2. φ est-elle surjective ?

3. φ est-elle bijective ?

4. Donner un exemple d'application définie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ qui soit injective et qui ne soit pas l'identité .

Exercice III

Etablir les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalité:

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad a^3+b^3+2 \geq 2ab+a+b$$

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*(n-1)a^n+b^n \geq na^{n-1}b$$

Exercice IV

1. A partir des résultats de l'exerice II, déterminer une bijection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Construire une bijection de $[-1,0[\cup]0,1]$ à valeurs dans $]-\infty,1]\cup[1,+\infty[$.

Exercice V

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{|3-x|} \leq 1$

2. $\sqrt{2-x} \geq 2 - \sqrt{1+x}$

3. $4x|x+1| = 1$

4. $|3x-1| \leq 2x$

5. $|x+1| + |x-3| \leq 9$

6. $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x+4} - 1$

Exercice VI

Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, un majorant, le plus grand élément, la borne supérieure, un minorant, le plus petit élément, la borne inférieure.

$A = [-1, 5[$ $\qquad B = [0,1[\setminus \left\{ \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\qquad C = \mathbb{R}^{+*} \cup]-1, 0[$

$D = \mathbb{Q} \cap]-2, 2]$ $\qquad E = \left\{ \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\qquad F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Exercice VII

Soit I et J deux intervalles. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles ?

1. $I \cup J$

2. $I \cap J$

3. $I + J = \{x + y,\ x \in I,\ y \in J\}$

Exercice VIII

Résoudre les systèmes suivants

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x + y = z \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z} \end{array} \right. \qquad (T) \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ \dfrac{x}{2y} = 1 \end{array} \right.$$

Exercice IX

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer les relations:

1. $0 \leq E(nx) - nE(x) \leq n - 1$

2. $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$