

Feuille d'exercice 2

Optimisation sous contraintes

Exercice I

En utilisant la méthode du lagrangien¹ et les variables d'écart, déterminer le (ou les) points (x, y) qui maximise la fonction objectif f sous la contrainte donnée.

1. $f(x, y) = 2y - x^2$. Contraintes : $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$ et $x \geq 0, y \geq 0$.
2. Retrouver ce résultat numériquement

Exercice II

Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices réelles $n \times n$.

1. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n$, on note respectivement $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ les composantes de A et B à la ligne i et colonne j . montrer que φ définie par

$$\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j} B_{i,j}$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n$. On suppose désormais que $\mathcal{M}_n$ est muni de ce produit scalaire.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (éventuellement complexes) de A et I la matrice identité d'ordre n . Montrer que $\det(I + tA) = 1 + t \operatorname{tr}(A) + t^2 f(A)$ où tr dénote la trace et f est une fonction de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$, indépendante de t .
3. Que vaut $\nabla \det(I)$.
4. Calculer numériquement le minimum du déterminant sous contrainte que la trace de la matrice soit égale à 1.

¹Joseph-Louis Lagrange, mathématicien italien puis français, du XVIIIe et XIXe siècle. Il travailla dans les années 1790 au système métrique et enseigna à l'Ecole Polytechnique dont il participa à la fondation. Il excella dans toutes les disciplines d'analyse, de théorie des nombres et de mécanique celeste. En 1788 il publia *Mécanique analytique* qui est célèbre pour l'utilisation des équations différentielles. La mécanique devient alors une branche des mathématiques. En 1797 il publia la première théorie des fonctions d'une variable réelle.



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Exercice III

En utilisant la méthode du gradient projeté, minimiser la fonction

$$(x, y) \mapsto x^4 + y^4$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 \geq 2$. Faire une itération en partant de $(2, 3)$.

Exercice IV

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier et $m = 10^6$. Considérons

$$r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

et

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$f(X) = \|r(X)\| = \sum_{i=1}^m r_i(x)^2$$

où r_i représente la i -ème composante du vecteur $r(X)$.

1. Calculer $\nabla f(X)$.
2. Montrer que $Hf(X) = {}^t D^2 r(X).r(X) + {}^t Dr(X).Dr(X)$
3. Soit

$$d_k = -({}^t Dr(X).Dr(X))^{-1} {}^t Dr(X).Dr(X)$$

Est-ce que d_k est une direction de descente dans un voisinage du minimum ?

4. Quel est l'avantage par rapport à la méthode de Newton ?

Exercice V

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2x + 1$$

Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$.

1. Trouver, par un calcul théorique, le ou les minimums de f se trouvant dans le demi-plan P .
2. Faites un programme qui calcule ce minimum