Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

Année 2002-2003
Semestre 5

Interrogation du 9/10/2002

correction

Exercice I

1. On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^5 - 6y \\ 6y^5 - 6x \end{pmatrix}$$

Le point (x,y) est critique si et seulement si

$$\nabla f(x,y) = 0$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x^5 - y = 0 \\ y^5 - x = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} y = x^5 \\ x^{25} - x = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} y = x^5 \\ x(x^{24} - 1) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$(x,y) \in \{(0,0),\ (1,1)\ (-1,-1)\}$$

Les trois points critiques sont donc $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

2. La matrice hessienne de f est

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 30x^4 & -6 \\ -6 & 30y^4 \end{pmatrix}$$

donc

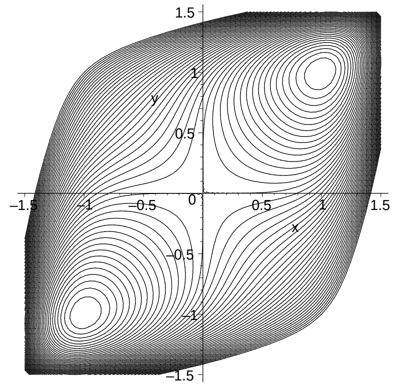
$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

le determinant est négatif, ce point est un point selle.

$$\mathrm{H}\, f(1,1) = \mathrm{H}\, f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 30 \end{pmatrix}$$

le determinant et la trace sont positifs, ces points sont des minima.

3. Le developpement limité de f au voisinage de $(0,0)$ à l'ordre 1 est $-6xy + o(x) + o(y)$ ainsi les lignes séparatrices de col sont données par les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$. On en déduit



Exercice II

1. Soit h et k deux réels

$$f(100+h, 10+k) = f(100,10) + \nabla f(100,10) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|^2\right)$$

pour $x > 0$ on a $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2\sqrt{x}} \\ 2y\sqrt{x} \end{pmatrix}$ donc

$$\nabla f(100,10) = \begin{pmatrix} 5 \\ 200 \end{pmatrix}$$

donc

$$f(100+h, 10+k) = 1000 + 5h + 200k + o\left(\left\| \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\|^2\right)$$

2. Par suite $f(100+h, 10+k)$ avec $h = 0.1$ et $k = 0.01$ peut être approximé par

$$f(100,10) + 5h + 200k$$

car h et k sont petits. Donc

$$f\,(\,100.1\,;\,10.01\,) \simeq 1000 + 0.5 + 2 = 1002.5$$

Exercice III

La matrice hessienne de $f_{a,b}$ a pour valeurs propres a et b donc ces quantités sont du même signe puisque les lignes de niveau correspondent à un minimum ou un maximum en $(0,0)$. Ainsi $a = b = 1$ ou $a = b = -1$.

On a donc $f_{a,b}(x,x) = 1 + 2ax^2 + x^6$, notons $g(x) = f_{a,b}(x,x)$. On a $g'(x) = 4ax + 6x^5 = x(4a + 6x^4)$. Pour que cette dérivée s'annule 3 fois il est nécessaire d'avoir $a < 0$ ainsi $a = -1$.

Conclusion $a = b = -1$.