Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 202 – Introduction à l'optimisation — Semestre 5

Examen 15/11/2002

correction

Exercice I

Considérons la fonction L définie sur $\mathbb{R}^5$ par

$$L(x, y, z, \lambda\alpha) = x^2 + 5xy - \frac{5}{96}z^3 - \lambda(x + y + z - 5 + \alpha^2)$$

Le point $(x, y, z, \lambda, \alpha)$ est critique si et seulement si $\nabla L(x, y, z, \lambda, \alpha) = 0$ ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 5y - \lambda = 0 \\ 5x - \lambda = 0 \\ -\frac{5}{32}z^2 - \lambda = 0 \\ x + y + z - 5 + \alpha^2 = 0 \\ \alpha\lambda = 0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{1}{32}z^2 + \frac{1}{80}z^2 \\ x + y + z - 5 = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ 2x + 5y = 0 \\ 5x = 0 \\ -\frac{5}{32}z^2 = 0 \\ x + y + z - 5 + \alpha^2 = 0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{3}{160}z^2 \\ -\frac{1}{20}z^2 + z - 5 = 0 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \alpha^2 = 5 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ (z - 10)^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{32}z^2 \\ y = -\frac{3}{160}z^2 \\ \lambda = -\frac{5}{32}z^2 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \alpha^2 = 5 \\ (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \lambda = -\frac{125}{8} \\ (x, y, z) = (-\frac{25}{8}, -\frac{15}{8}, 10) \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \alpha^2 = 5 \\ (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{array}\right.$$

Il y a donc deux points candidats à être minimum sous la contrainte indiquée : $(-\frac{25}{8}, -\frac{15}{8}, 10)$ et $(0, 0, 0)$.

Exercice II

Nous noterons

$$\begin{aligned}
\overline{x^4} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) \\
\overline{x^4 y} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 y_i\right) \\
\overline{x^8} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^8\right) \\
\overline{y} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)
\end{aligned}$$

Soit φ l'application dfinie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(a + b x_i^4 - y_i\right)^2$$

on a

$$\nabla\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{n}(a + b x_i^4 - y_i) \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i^4(a + b x_i^4 - y_i) \end{pmatrix} = 2n \begin{pmatrix} a + b\,\overline{x^4} - \overline{y} \\ a\,\overline{x^4} + b\,\overline{x^8} - \overline{x^4 y} \end{pmatrix}$$

ainsi (a,b) est un point critique de φ si et seulement si

$$\begin{cases} a + b\,\overline{x^4} = \overline{y} \\ a\,\overline{x^4} + b\,\overline{x^8} = \overline{x^4 y} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{x^4} \\ \overline{x^4} & \overline{x^8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{x^4 y} \end{pmatrix}$$

Or $\overline{x^4}^{\,2} < \overline{x^8}$ (on peut utiliser l'une des techniques exploitées dans le devoir 2) donc la matrice est inversible donc

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \overline{x^4} \\ \overline{x^4} & \overline{x^8} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{x^4 y} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\overline{x^8} - \overline{x^4}^{\,2}} \begin{pmatrix} \overline{x^8} & -\overline{x^4} \\ -\overline{x^4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{y} \\ \overline{x^4 y} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

donc finalement

$$\begin{cases} a = \dfrac{\overline{x^8}\,\overline{y} - \overline{x^4}\,\overline{x^4 y}}{\overline{x^8} - \overline{x^4}^{\,2}} \\[2ex] b = \dfrac{-\overline{x^4}\,\overline{y} + \overline{x^4 y}}{\overline{x^8} - \overline{x^4}^{\,2}} \end{cases}$$

Exercice III

On trace représente l'ensemble des points admissibles et on cherche les points du graphe qui sont les petits ou les plus grands dans cet ensemble de points admissibles. Les cercles ont été tracés dans les conditions de la plupart des étudiants pendant l'examen, c'est-à-dire sans compas. Le gradient est dirigé vers le haut et vers la droite wn $(1;1)$ donc l'altitude augmente dans cette direction.