Examen du 15/11/2002

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Vous devez rendre ce sujet avec votre copie. Vos réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (7 points)

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y,z) = x^2 + 5xy - \frac{5}{96}z^3$$

Trouver les points candidats à être minimum de f sous la contrainte $x + y + z \leq 5$.

Exercice II (7 points)

Soit $\mathcal{N} = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)\}$ un nuage de n points où $n \geq 3$ est un entier. On suppose que les abcsisses sont deux à deux distinctes. Soit a et b deux réels et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_{a,b}(x) = a + bx^4$. Trouver a et b pour que $f_{a,b}$ approxime au mieux le nuage de points $\mathcal{N}$ au sens des moindres carrés, c'est-à-dire minimisant

$$\sum_{i=1}^{n} (f_{a,b}(x_i) - y_i)^2$$

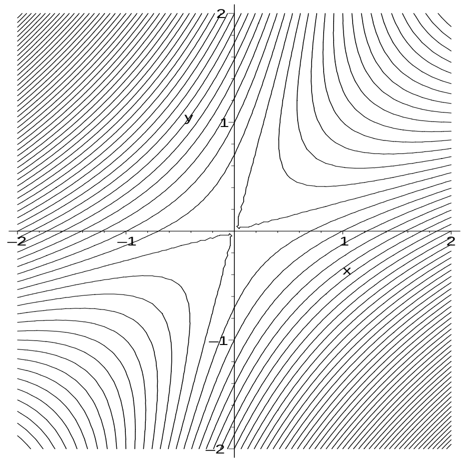
Exercice III (6 points)

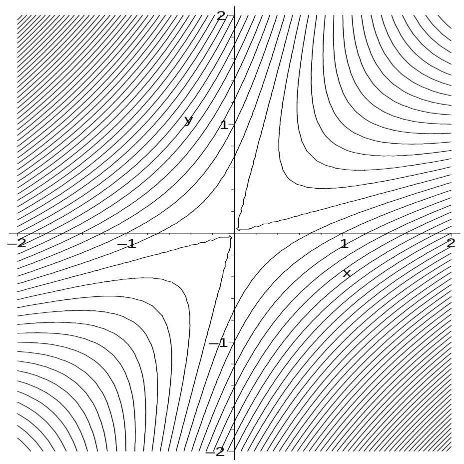
On considère la fonction f dont les courbes de niveau sont données au dos du sujet. Le gradienten $(1;1)$ est orienté vers le haut et vers la droite. Les trois graphes représentent les mêmes courbes de niveau.

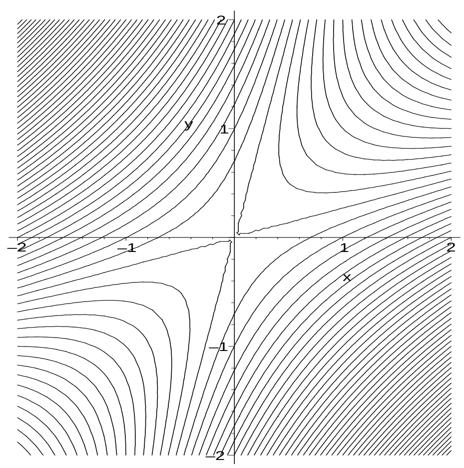
1. Trouver graphiquement le ou les minimum(s) de f sous la contrainte $x - y = 1$. Indiquez votre réponse sur le graphe du haut

2. Trouver graphiquement le ou les minimum(s) de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. Indiquez votre réponse sur le graphe du milieu.

3. Trouver graphiquement le ou les maximum(s) de f sous la contrainte $x^2 + y^2 \leq 1$. Indiquez votre réponse sur le graphe du bas.


2
y
1
−2
−1
1
2
x
−1
−2


2
y
1
−2
−1
1
2
x
−1
−2


2
y
1
−2
−1
1
2
x
−1
−2