Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 202 – Introduction à l'optimisation — Semestre 5

Devoir 2

A rendre le 15/10/2002

Soit $n \geq 2$ un entier. On se donne n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$, et on suppose que ces points n'ont pas tous la même abscisse. Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\overline{x^s} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s \qquad \overline{x^s y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s y_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exercice I

Soit

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

1. Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$

2. Minimiser f sur $\mathbb{R}^2$

3. Trouver la droite "des moindres carrés" du nuage de points $\{(x_i, y_i)\}$.

4. Appliquer au nuage de points $\{(1,2); (2,3); (0,-1)\}$.

Exercice II

Le but de cet exercice est de trouver des réels a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ minimise

$$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

On supposera que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} & \overline{x^2} \\ \overline{x} & \overline{x^2} & \overline{x^3} \\ \overline{x^2} & \overline{x^3} & \overline{x^4} \end{pmatrix}$$

est inversible

1. Montrer que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^3$.

2. Trouver a, b et c tels que $y = ax^2 + bx + c$ est l'équation de la parabole cherchée.

3. Considérons $n = 4$ et les points $M_1(-3,-4)$, $M_2(-1,2)$, $M_3(1,2)$ et $M_4(3,0)$. Trouver la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ telle que $\sum_{i=1}^{4}(y_i-(ax_i^2+bx_i+c))^2$ est le plus petit possible.

Exercice III

Soit $p \geq 1$ un entier et

$$P(x) = \sum_{j=0}^{p} a_j x^j$$

Le but de cet exercice est de trouver les $p+1$ réels a_j que le polynôme P minimise $\sum_{i=1}^{n}(y_i - P(x_i))^2$. Considérons

$$\begin{array}{rccl} f \; : & \mathbb{R}^{p+1} & \to & \mathbb{R} \\ & (a_0, \ldots, a_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - P(x_i))^2 \end{array}$$

On pourra supposer l'inversibilité de *l'alter ego* de la matrice M de l'exercice II.

1. Montrer que f est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

2. Trouver le polynôme P tel que $\sum_{i=1}^{n}(y_i - P(x_i))^2$ est le plus petit possible. On pourra exprimer le résultat sous forme $A = M^{-1}Y$ ou A est le vecteur constitué des a_j, M une matrice à determiner et Y un vecteur à determiner.

3. Vérifier que l'on retrouve les résultats des exercices 1 et 2 lorsque $p = 1$ et $p = 2$.