Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

Année 2002-2003
Semestre 5

Devoir 1

corrigé

Exercice I

1. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix}$$

donc

$$q(x,y) = (x \ \ y) \ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bx + cy^2$$

2. Considérons le polynôme caractéristique de M. On a

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= \det(M - \alpha I) \\ &= \begin{vmatrix} a-\alpha & b \\ b & c-\alpha \end{vmatrix} \\ &= (a-\alpha)(c-\alpha) - b^2 \\ &= \alpha^2 - (a+c)\alpha + ac - b^2 \end{aligned}$$

Le discriminant de ce trinôme est

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

ainsi

$$\lambda = \frac{a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

Les vecteurs propres associés s'obtiennent en calculant les espaces propres $\ker(M - \lambda I)$ et $\ker(M - \mu I)$. Ainsi

$$u = \begin{pmatrix} a + c - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \\ -2b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \\ -2b \end{pmatrix}$$

3. Calculons le produit scalaire de u et v

$$u \cdot v = (a+c-\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2})(a+c+\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}) - 4b^2 = (a+c)^2 - ((a-c)^2 + 4b^2) - 4b^2 = 0$$

Ainsi u et v sont orthogonaux.

4. Posons $U = \frac{1}{\|u\|} u$ et $V = \frac{1}{\|v\|} v$, on a $\|U\| = \|V\| = 1$ et $U \cdot V = 0$. Considérons

$$P = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{pmatrix}$$

où U_i et V_i représentent respectivement la i-ème composante des vecteurs U et V. Alors

$$\begin{aligned} P^t\, P &= \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \\ U_2 & V_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_1^2 + U_2^2 & U_1 V_1 + U_2 V_2 \\ U_1 V_1 + U_2 V_2 & V_1^2 + V_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|U\|^2 & U \cdot V \\ U \cdot V & \|V\|^2 \end{pmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

ainsi $P^{-1} = P^t$. D'autre part U et V sont des vecteurs propres de M associés respectivement à λ et μ donc

$$P^{-1} M P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

5. Notons

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

on a

$$\begin{aligned} q(x,y) &= z^t\ M\ z \\ &= (PZ)^t\ M(PZ) \\ &= Z^t\ P^t\ M\ P\ Z \\ &= Z^t\ P^{-1}\ M\ P\ Z \\ &= Z^t\ D\ Z \\ &= \lambda X^2 + \mu Y^2 \end{aligned}$$

Le signe de $q(x,y)$ est donc

- toujours positif si les valeurs propres de M sont toutes les deux positives
- toujours négatif si les valeurs propres de M sont toutes les deux négatives
- tantot positif tantot négatif si les valeurs propres de M sont de signes opposés

Exercice II

1. Soit $q(x,y) = 8x^2 + 2xy + 7y^2$ et $\varphi(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2$. La condition (i) est claire, il s'agit de montrer que pour tout (x,y) dans le disque centré en $(0,0)$ de rayon 1, on a $|\frac{\varphi(x,y)}{q(x,y)}| < \frac{1}{2}$.

$$\left| \frac{\varphi(x,y)}{q(x,y)} \right| = \left| \frac{x^2y^3 + x^3y^2}{8x^2 + 2xy + 7y^2} \right|$$

Il existe un réel $\rho \in [0,1[$ et un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ on a alors

$$8x^2 + 2xy + 7y^2 = \rho^2(8\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + 7\sin^2\theta) = \rho^2(7 + \cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta) \geq 5\rho^2$$

$$|x^2y^3 + x^3y^2| = |x^2y^2(x+y)| = |\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos\theta + \sin\theta)| \leq 2\rho^5$$

donc

$$\left| \frac{x^2y^3 + x^3y^2}{8x^2 + 2xy + 7y^2} \right| \leq \frac{2}{5}\rho^3 < \frac{1}{2}$$

2. On a

$$f(x,y) - f(0,0) = q(x,y) + \varphi(x,y) = q(x,y)\left(1 + \frac{\varphi(x,y)}{q(x,y)}\right)$$

Pour tout (x,y) dans le disque centré en $(0,0)$ de rayon 1 on a

$$-\frac{1}{2} < \frac{\varphi(x,y)}{q(x,y)} < \frac{1}{2}$$

ainsi $1 + \frac{\varphi(x,y)}{q(x,y)} > 0$, par suite $f(x,y) - f(0,0)$ est du signe de $q(x,y)$.

3. Les valeurs propres de la matrice associée à q sont positives donc $q(x,y)$ est positive pour tout (x,y) dans le disque centré en $(0,0)$ de rayon 1, ainsi on a $f(x,y) \geq f(0,0)$ dans de disque et donc $(0,0)$ est un minimum local.

Il est à noter que la positivité de q peut se montrer également en remarquant que $8x^2 + 2xy$ est le début d'un carré, on a alors

$$q(x,y) = \left(2\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y\right)^2 + \frac{27}{4}y^2$$

donc $q(x,y) \geq 0$.