Pôle Universitaire Léonard de Vinci | Année 2002-2003
CS 202 – Introduction à l'optimisation | Semestre 5

# Devoir 1

*A rendre le 24/09/2002*

## Exercice I

Considérons $a$, $b$, $c$, trois réels et $q$ la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

**1.** Montrer qu'il existe une matrice symétrique $M$ telle que

$$q(x,y) = (x \;\; y) \;\; M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**2.** Trouver les valeurs propres $\lambda$ et $\mu$ de $M$ et les vecteurs propres associés $u$ et $v$. En déduire que $M$ est toujours diagonalisable,

**3.** Montrer que $u$ et $v$ sont orthogonaux

**4.** Montrer qu'il existe une matrice inversible $P$, dont la transposée est $P^{-1}$, telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

**5.** Considérons $X$ et $Y$ définis par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Montrer que $q(x,y) = \lambda X^2 + \mu Y^2$, en déduire le signe de $q(x,y)$ en fonction de $\lambda$ et $\mu$.

## Exercice II

Considérons la fonction $f$ définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = -1 + 8x^2 + 2xy + 7y^2 + x^2y^3 + x^3y^2$$

**1.** Montrer qu'il existe une fonction $q$ et une fonction $\varphi$ telles que

$$f(x,y) = f(0,0) + q(x,y) + \varphi(x,y)$$

et vérifiant

*i)* La fonction $q$ est de la forme $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a$, $b$ et $c$ trois réels constants.

*ii)* Pour tout $(x,y)$ dans le disque centré en $(0,0)$ de rayon 1, on a $|\frac{\varphi(x,y)}{q(x,y)}| < \frac{1}{2}$

**2.** En déduire que $f(x,y) - f(0,0)$ est du signe de $q(x,y)$ pour tout $(x,y)$ dans le disque centré en $(0,0)$ de rayon 1.

**3.** Montrer que $f$ admet un minimum local en $(0,0)$.