

Feuille d'exercices 4

Optimisation sous contraintes

Exercice I

Minimiser $x^2 + y^2$ sous la contrainte $x^2 + y \geq 1$.

Exercice II (CS, GI, MS)

Refaire les exercices III et IV de la feuille d'exercices 2, en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Expliciter ces multiplicateurs dans chaque cas et interpréter.

Exercice III (CS, GI, MS)

Le plan d'équation $x + y + 2z = 2$ intersecte le paraboloid d'équation $z = x^2 + y^2$ en une ellipse. Trouver les points de l'ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

Exercice IV (MIF)

Une entreprise utilise deux facteurs de production (du travail et du capital) pour produire une certaine quantité de biens. Si f est la fonction de production, K (L) le nombre d'unités de facteur capital (travail), alors $Q = f(K, L)$, ou Q est la quantité de biens produite. On note w_L et w_K le prix unitaire du facteur travail et capital (respectivement) que l'entreprise considère comme des données exogènes. Soit Q une fonction de production de Cobb-Douglas¹ donnée par $Q = f(K, L) = K^\alpha L^\beta$, ou α et β sont deux paramètres.

1. A quelle condition cette fonction est elle homogène de degré 1 ?
2. Que signifie économiquement l'homogénéité de degré 1 ?
3. Représentez graphiquement une courbe de niveau de f dont l'équation est de la forme $K = g(L)$

¹Paul Douglas, économiste Américain du XXe siècle, sénateur démocrate de l'Etat de l'Illinois au Sénat des Etats-Unis, travailla sur des tests statistiques concernant la productivité marginale. Avec l'aide de Charles Cobb, il donna cette estimation de la fonction de production.



Paul Howard Douglas (1892-1976)

4. Fixons une courbe de niveau a $Q = 10$. Calculez K pour $L = 10$ et pour $L = 11$. Interpréter économiquement le rapport $\frac{\Delta q}{\Delta L}$. D'une façon générale, comment peut on interpréter la pente d'une courbe de niveau en un point donné (L, K) ?
5. Soit $CT(K, L)$ la fonction de coût total. Représentez, sur le graphique précédent, une courbe d'iso-coût.
6. Ecrivez le programme d'optimisation lorsque la firme est contrainte de produire une quantité Q de biens.
7. Résolvez graphiquement ce problème d'optimisation.
8. Comment varie la quantité optimale de travail lorsque le prix du travail augmente. (Même question lorsque le prix du capital augmente)
9. Déterminez, en utilisant la méthode du Lagrangien, la quantité optimale K^* et L^* des facteurs de production capital et travail respectivement.
10. Comment varie la quantité K^* lorsque w_L augmente. Même question lorsque w_K augmente. Ces résultats étaient ils attendus ?

Exercice V (MIF)

Une entreprise dispose de k unités de travail qu'elle doit utiliser pour produire du bien 1 ou du bien 2. Pour produire x_i unités du bien i , il est nécessaire d'utiliser x_i^2 unités de travail. La quantité de bien i produite est vendue au prix p_i sur le marché.

1. Sachant que le coût du travail est nul, déterminer la fonction de profit, fonction objectif de l'entreprise.
2. Déterminez l'équation de la contrainte ?
3. Représentez (concernant la contrainte) une courbe de niveau. (On mettra x_2 en ordonnée)
4. Représentez sur le même graphique, une courbe d'iso profit.
5. Résolvez graphiquement ce problème d'optimisation.
6. Déterminez, en utilisant la méthode du Lagrangien, les quantités optimales x_i^* .
7. Calculez la valeur du multiplicateur de Lagrange.

Exercice VI

En utilisant la méthode du lagrangien, déterminer le (ou les) points (x, y) qui maximise la fonction objectif f sous la contrainte donnée.

1. $f(x, y) = 2y - x^2$. Contraintes : $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$ et $x \geq 0, y \geq 0$.
2. $f(x, y) = xy$. Contrainte : $h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$.
3. $f(x, y) = x^2 + x + 4y^2$. Contraintes : $k(x, y) = 2x + 2y \leq 1$ et $x \geq 0, y \geq 0$.