Feuille d'exercices 3

Introduction à l'optimisation sous contraintes

Exercice I

Trouver les extrema des fonctions f suivantes sur le domaine D indiqué

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, D étant le triangle fermé de sommets $(-1,1)$, $(2,1)$ et $(-1,-2)$.

2. $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice II

On considère la fonction $Z(x,y) = x + 2y$ et les contraintes

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0, \;\; y \geq 0 \end{cases}$$

Au moyen d'un graphe trouver les extrema de Z.

Exercice III

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange[1] pour trouver les extrema potentiels des fonctions de deux variables suivantes sous la contrainte indiquée. Dites lorsque l'on peut garantir qu'il s'agit d'un extremum.

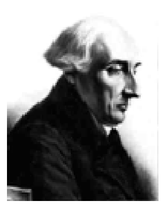
1. $f(x,y) = x^2 - y^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x,y) = 4x + 6y$ avec $x^2 + y^2 = 13$

3. $f(x,y) = x^2 y$ avec $x^2 + 2y^2 = 6$

4. $f(x,y) = x^2 + y^2$ avec $x^4 + y^4 = 1$

[1] Joseph-Louis Lagrange, mathématicien italien puis français, du XVIIIe et XIXe siècle. Il travailla dans les années 1790 au système métrique et enseigna à l'Ecole Polytechnique dont il participa à la fondation. Il excella dans toutes les disciplines d'analyse, de théorie des nombres et de mécanique celeste. En 1788 il publia *Mécanique analytique* qui est célébre pour l'utilisation des équations différentielles. La mécanique devient alors une branche des mathématiques. En 1797 il publia la première théorie des fonctions d'une variable réelle.



Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)

Exercice IV

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema potentiels des fonctions f suivantes sous la contrainte indiquée. Dites lorsque l'on peut garantir qu'il s'agit d'un extremum.

1. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 35$

2. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ avec $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

3. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ avec $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$

4. $f(x, y, z) = x + 2y$ avec $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$

Exercice V (MIF)

Un investisseur se demande quelle fraction α_i de sa richesse il devrait investir dans l'actif i, pour $i = 1, 2..., n$. L'actif i a un rendement qui est une variable aléatoire d'espérance μ_i et de variance σ_i^2. On notera $\mu^T = (\mu_1, ...\mu_n)$ le vecteur des rendements espérés (ou T indique qu'il s'agit du transposé de μ), et $\alpha^T = (\alpha_1, ...\alpha_n)$ le vecteur des fractions de la richesse investie. Soit V la matrice de variance covariance, comportant les variances σ_i^2 sur la diagonale et les covariances σ_{ij} ailleurs. On rappelle que $\mathrm{Var}(\alpha^T X) = \alpha^T V \alpha$ et que $\Delta(\mathbb{R}^+) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1\}$ est le simplexe unitaire de $\mathbb{R}^n$.

1. Quelle est l'équation d'un portefeuille quelconque ? Quelle est son esperance et sa variance ?

2. Formuler matriciellement le problème d'optimisation de notre investisseur s'il cherche à minimiser la variance des rendements de son portefeuille sous la contrainte que l'espérance de rendement soit égale à une constante et que la somme des fractions investies soit égale à un.

3. Soit les fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $f(x) = a^T x$, $g(x) = a^T x + cx^T x$, ou c est un scalaire. On notera $\nabla f(x)$, $\nabla g(x)$ le gradient (qui est un vecteur ligne) de ces trois fonctions. Montrer que $\nabla f(x) = a$ et que $\nabla g(x) = a + 2cx$

4. Soit la fonction $h(x) = x^T A x$, ou A est une matrice symétrique. Posons plus spécifiquement

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

et $x = (x_1, x_2)^T$. Montrer que $x^T A = (ax_1 + bx_2, bx_1 + cx_2)$. Déterminer $x^T A x$. Montrer que $\nabla h(x) = 2x^T A$ s'il s'agit d'un vecteur ligne et que $(\nabla h(x))^T = 2Ax$ s'il s'agit d'un vecteur colonne.

5. A étant la matrice de variance covariance, peut-on en déduire qu'elle est inversible ?

6. Formuler le lagrangien du problème $L(x, \lambda)$, avec $x \in \mathbb{R}^n$, et $\lambda \in \mathbb{R}^2$ sous forme matricielle.

7. Déterminer $\nabla_x L(x, \lambda)$, le gradient du lagrangien par rapport à x s'il s'agit d'un vecteur colonne.

Exercice VI (CS, GI, MS)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On consière A une matrice $n \times n$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^T A x + B \cdot x$ où x^T est la transposée de x et le $B \cdot x$ le produit scalaire de B et x.

1. Calculer ∇f

2. Calculer $\mathrm{H}\, f$