Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2002-2003
CS 202 – Introduction à l'optimisation — Semestre 5

Feuille d'exercices 2

Application de l'optimisation libre

Exercice I

1. Pour chaque fonction des exercices I et V qui ont au moins un point critique, esquisser les courbes de niveau de la fonction au voisinage du ou des points critiques.

2. Esquisser les courbes de niveau pour la fonction de la question 7 de l'exercice I de la feuille 1 et pour les fonctions des questions 2 et 5 de l'exercice V de la feuille 1.

Exercice II

Les graphes des fonctions des exercices I et V de la feuille 1 sont dessinés sur la feuille annexe. Les numéros des fonctions de l'exercice I ne sont pas précisés. Indiquez la correspondance.

Exercice III (CS, GI, MS)

Trouver trois nombres positifs dont la somme est 100 et dont le produit est maximum.

Exercice IV (CS, GI, MS)

Trouver les points du plan $2x - y + z = 1$ qui sont le plus pret du point $(-4, 1, 3)$.

Exercice V (CS, GI, MS)

Une société de cablage doit placer un routeur gérant trois sites : A, B et C. Elle souhaite minimiser la longueur de cable utilisée. On suppose que (ABC) forme un triangle isocèle rectangle. Trouver le point F qui minimise $FA + FB + FC$. Un tel point est appelé point de Fermat[1].

[1] Pierre Fermat, mathématicien français, du XVIIe siècle fut conseiller au parlement de Toulouse, il se passionnait pour les mathématiques. Il fonde en même temps que Descartes la gèométrie analytique, est précurseur du calcul différentiel et il est à l'origine du calcul des probabilités avec Pascal. En étudiant l'arithmétique, il s'intéressa au chapitre concernant les triplets de Pythagore, c'est-à-dire aux ensembles de trois nombres x, y, z (par exemple 3, 4 et 5), pour lesquels l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ est vérifiée. D'après Fermat, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entiére pour $n > 2$. Par exemple, il n'existe pas d'entiers positifs x, y et z tels que $x^3 + y^3 = z^3$. Dans la marge de son exemplaire des *Arithmétiques*, il écrivit qu'il avait découvert une démonstration vraiment remarquable, mais qu'il ne pouvait l'écrire dans la marge (grand théorème de Fermat). Cette démonstration fut cherchée pendant 300 ans sans succès. En 1993, Andrew Wiles, trouve une démonstration du grand théorème de Fermat.

Pierre Fermat (1601-1665)

Exercice VI (MIF)

Soit $f(x_1, \overline{x}_2)$ la fonction de production, ou x_1 est la quantité de facteur de production 1 et ou $\overline{x}_2$ est la quantité constante de facteur de production 2. La seule variable de décision de l'entreprise est donc x_1. Soit $q = f(x_1, \overline{x}_2)$ la production (*i.e.*, quantité du bien produit) de l'entreprise , ou f est une fonction de production croissante et concave en x_1, p est le prix unitaire du bien vendu, w_1, w_2 sont le prix des facteurs de production 1 et 2 respectivement. L'entreprise (agissant sur un marché concurrentiel) considère les prix p, w_1, w_2 comme des données exogènes.

1. Déterminer l'équation de la recette totale.

2. Déterminer l'équation du coût total.

3. Quel est le programme d'optimisation de l'entreprise ?

4. Déterminer l'équation de la condition nécéssaire.

5. Interpréter économiquement cette équation.

6. La condition suffisante pour un maximum local est-elle vérifiée ? On appelle courbe d'iso-profit l'ensemble des vecteurs (x_1, q) de $(\mathbb{R}^+)^2$ qui engendre un même profit.

7. Déterminer l'équation d'une courbe d'iso-profit.

8. Représenter $f(x_1, \overline{x}_2)$ ainsi qu'une courbe d'isoprofit. On mettra x_1 en abscisse et q en ordonnée.

9. Déterminer graphiquement la quantité optimale de facteur de production 1.

10. Etudier graphiquement les conséquences d'une baisse puis d'une hausse du prix du bien produit. Interpréter économiquement.

11. Question identique concernant le prix du facteur de production 1.

Exercice VII (MIF)

Une entreprise est en situation de monopole dans deux régions indépendantes, *i.e.* elle décide du prix de vente à afficher. La demande de la région 1 est $q_1(p) = 20 - 2p$ et la demande de la région est $q_2(p) = 30 - p$. On sait que le décideur public a interdit à l'entreprise de pratiquer une discrimination par les prix. Soit

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{2} q_i(p)$$

la fonction de demande agrégée et $\Pi(p) = pQ(p) - CT(Q(p))$ la fonction de profit agrégée, ou $CT(Q(p))$ est la fonction de coût total. On rappelle qu'une fonction de demande n'est jamais négative, *i.e.* $q(p) \geq 0 \ \forall p \in \mathbb{R}^+$.

1. Déterminer l'équation de la demande agrégée.

2. Cette fonction de demande agrégée est elle une fonction linéaire du prix.

3. En supposant que les coûts de production sont nuls et que la variable de décision de l'entreprise est le prix, déterminer le programme d'optimisation de l'entreprise.

4. Calculer le (ou les) prix optimal (prix optimaux).

5. Représenter graphiquement la fonction de profit agrégée.

6. Faire les question 1 à 5 dans le cas ou $q_2(p) = 46 - p$.