Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

Année 2002-2003
Semestre 5

Feuille d'exercices 1

Gradient et matrice hessienne

Exercice I

Calculer le gradient de chaque fonction f donnée ci-dessous.

1. $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$

4. $f(x,y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

5. $f(x,y) = xy - 2x - y$

6. $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

7. $f(x,y) = e^x \cos(y)$

Exercice II

Trouver les points critiques de chaque fonction de l'exercice I

Exercice III

Calculer la matrice hessienne[1] de chaque fonction de l'exercice I

Exercice IV

Trouver les extrema de chaque fonction de l'exercice I. Pour chaque extrema vous préciserez la nature du point critique.

---

[1] Ludwig Hesse, mathématicien Allemand du XIXe siècle, travailla essentiellement sur le développement de la théorie des fonctions algébriques et la théorie des invariants. Il introduit la matrice hessienne en 1842 lors de l'étude de courbes quadratiques et cubiques.

Ludwig Otto Hesse (1811–1874)

Exercice V

Trouver les extrema de chaque fonction f donnée ci-dessous. Dans chaque cas, préciser leur nature de celui-ci.

1. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

2. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

3. $f(x,y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$

4. $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

5. $f(x,y) = xy(1 - x - y)$

Exercice VI

On considère les formes quadratiques q suivantes. Dans chaque cas dites si q est positive, négative ou ni l'un l'autre.

1. $q(x) = x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2$

2. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 + 4x_3^2$

3. $q(x) = 2x_1^2 + 8x_2x_3 + 3x_4^2 + 2x_1x_4$

4. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Exercice VII

Calculer les extrema de la fonction f donnée.

1. $f(x,y,z) = 8x^2 + y^2 + z^2 + xz + zy + 1$

2. $f(x,y,z) = 19 - 19x + 8x^2 + y^2 + y + z^2 - 5z + xz + yz$

3. $f(x,y,z,t) = tx^2 + ty^2 + z^3$

Exercice VIII

1. Est-il possible qu'une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ait deux minima locaux différents et pas de maximum local ? Donner un exemple ou démontrer que cela est impossible.

2. Est-il possible qu'une fonction C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ ait deux minima locaux différents et pas de maximum local ? Donner un exemple ou démontrer que cela est impossible.