Feuille d'exercices 7

Adhérence, Intérieur, Frontière

Exercice I

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

2. Montrer que si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice II

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

1. Comparer $\overset{\circ}{(A \cup B)}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.

2. Même question pour $\overset{\circ}{(A \cap B)}$ et $\mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Exercice III

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

1. Comparer $\overline{(A \cup B)}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

2. Même question pour $\overline{(A \cap B)}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice IV

On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est rare si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$, et que B est de la première catégorie de Baire[1] (ou encore un ensemble maigre) s'il est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles rares.

1. Donner un exemple d'ensemble rare et un exemple d'ensemble de la première catégorie de Baire.

2. L'intersection de deux ensembles de la première catégorie de Baire est-il un un ensembles de la première catégorie de Baire ? Qu'en est-il de la réunion ?

[1] René Baire, mathématicien français, de la fin du XIXe siècle et du début du XXe siècle, travailla sur de nombreux domaines et en particulier la théorie des fonctions et le concept de limite.

René-Louis Baire (1874-1932)

Exercice V

Pour chacun des ensembles suivants, indiquez l'intérieur, l'adhérence et la frontière, les points isolés et les points d'accumulation.

$$
\begin{array}{lcllcllcl}
A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A \cup \{0\} & C & = &]0,1] \cup \{0;2;4\} \\[1em]
D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0] \cup \{-1;2\} \\[1em]
G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\\[1em]
J & = &]-1,0[\cup]0,1[& K & = & \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & L & = & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Exercice VI

1. Soit f et g les applications définies de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par $f(X) = \mathring{\overline{X}}$ et $g(X) = \overline{\mathring{X}}$. Montrer que $f \circ f = f$ et $g \circ g = g$.

2. Donner l'exemple d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ pour lequel A, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$, $\mathring{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ sont deux à deux distincts.

3. Montrer qui si l'on prend l'adhérence ou l'interieur de l'un des ensembles ci-dessus, on retrouve l'un de ces ensembles.

Exercice VII

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$.

1. Comparer $\partial(A \cup B)$ et $(\partial A) \cup (\partial B)$

2. Comparer $\partial(A \cap B)$ et $(\partial A) \cap (\partial B)$

Exercice VIII

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble E

2. Déterminer E^* et E'

3. L'ensemble E est-il fermé ? Quelle est son adhérence ?

4. L'ensemble E est-il ouvert ? Quel est son interieur ?

5. Déterminer la frontière de E.