Feuille d'exercices 6

Ensembles fermés

Exercice I

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un fermé ou non.

$$\begin{array}{lllllllll} A & = & \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B & = & A\cup\{0\} & C & = &]0,1]\cup\{0;2;4\} \\ D & = & [1,2] & E & = &]0,1[\cup\{2\} & F & = &]-\infty,0]\cup\{-1;2\} \\ G & = & \mathbb{Q} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\end{array}$$

Exercice II

On considère

$$A=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$

1. Représenter A graphiquement.

2. L'ensemble A est-il ouvert ?

3. L'ensemble A est-il fermé ?

Exercice III

On considére *l'ensemble triadique de Cantor*[1] K défini dans le premier devoir à rendre. Cet ensemble est-il ouvert ? Est-il fermé ?

[1] Ferdinand Cantor, mathématicien Germano-Russe, jetta en 1872 les bases de la *théorie des ensembles*. Par ensemble, on entend alors "un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée". Mais l'utilisation des ensembles sans l'aide de règles précises conduit rapidement à des paradoxes. Le paradoxe "le barbier rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-même, mais le barbier se rase-t-il lui-même ?" considéré au début comme un problème amusant, provoque une crise des fondements. En effet sous une forme mathématique, la notion de l'ensemble des ensembles qui ne sont pas élément d'eux-même est contradictoire. Le point de vue intuitif recèle le danger de considérer comme ensembles des collections d'objets qui ne sont pas définis par des propriété mathématiques. Les difficultés rencontrées dans la théorie des ensembles de Cantor seront clarifiées par l'axiomatisation de cette dernière. La première axiomatisation est due à Zermelo, en 1908, elle est améliorée par Fraenkël et Skolem en 1922 et 1923.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

Exercice IV

Montrer que tout ensemble fini est fermé

Exercice V

1. Montrer que la réunion de deux fermés est un fermé. En déduire que la réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé

2. Montrer que la réunion d'un nombre fini de fermés peut ne pas être fermée.

3. Montrer que l'intersection de fermés est un fermé

4. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des fermés