Feuille d'exercices 5

Ensembles ouverts

Exercice I

1. L'ensemble $[0, 3]$ est-il un voisinage de 3 ? Qu'en est-il de $[0, 3[$?

2. L'ensemble $[0, 3]$ est-il un voisinage de 1 ? Qu'en est-il de $[0, 3[$?

3. L'ensemble $[0, 3] \cup [-2, -1[$ est-il un voisinage de 1 ?

Exercice II

Montrer que $\mathbb{R}$ a la propriété de Hausdorff[1]

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x \neq y,\ \exists (V, W) \in \mathcal{V}(x) \times \mathcal{V}(y),\ V \cap W = \emptyset$$

Exercice III

1. Montrer que l'intersection de deux ouverts est un ouvert. En déduire que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

2. Montrer que l'intersection d'un nombre infini d'ouverts peut ne pas être ouvert.

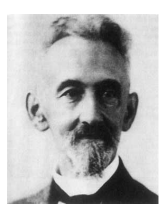
3. Montrer que la reunion d'ouverts est un ouvert.

4. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des ouverts.

Exercice IV

Soit A un ouvert minoré, montrer que A ne contient pas sa borne inférieure.

[1] Felix Hausdorff, mathématicien Allemand du XXe siècle, travailla sur les fondements des mathématiques et la topologie. On lui doit une série de résultats, dont l'ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre* paru en 1914 où, en se basant sur les travaux de Fréchet, il crée la théorie de la topologie et des espaces métriques.



Felix Hausdorff (1868–1942)

Exercice V

Représenter graphiquement chaque ensemble suivant et dites si c'est un ouvert ou non.

$$\begin{array}{lllllllll} A & = &]-1,2[& B & = &]-1,2[\cup]2,3[& C & = &]-1,2[\cup]6,7[\\ D & = & [-1,2] & E & = &]0,1[\cup\{3\} & F & = &]-\infty,1[\\ G & = & \mathbb{Z} & H & = & \mathbb{R}^* & I & = & [0,1[\\ J & = & \{1\} & K & = & \mathbb{Q} & L & = & \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\end{array}$$

Exercice VI

Pour chaque ensemble de l'exercice V, indiquer quel est l'interieur.

Exercice VII

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$. On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$

1. Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert. La réciproque est-elle vraie ?

2. Comparer $\overset{\circ}{\overbrace{(A+B)}}$ et $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$. C'est-à-dire dites si $\overset{\circ}{\overbrace{(A+B)}} \subset \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$ et/ou si $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{(A+B)}}$.