Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — F 01 – Semestre 1

Feuille d'exercices 4

Suites numériques récurrentes

Exercice I

On considère la suite

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2. Quel est le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Calculer

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[u_n, \sqrt{3} + \frac{1}{n}\right]$$

Exercice II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la *suite de Fibonacci*[1]. Cette suite est définie par

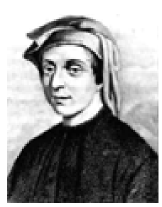
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est à termes positifs et que $\forall n \geq 2, u_{n+1} \geq u_n + 1$.

2. En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Quel est le terme général de la suite de Fibonacci ?

[1] Leonardo Pisanno, surnomé Fibonnaci, est un mathématicien italien du début du XIIIe siècle. Il passa son enfance en Afrique du Nord où son père dirigeait une sorte de comptoir. C'est ainsi qu'il eut l'occasion d'étudier les travaux algébriques d'al-Khuwārizmī. Par la suite il voyagea dans le monde méditerranéen recontrant de nombreux scientifiques et prenant connaissance des différents systèmes de calculs en usage. De retour à Pise, il publie *Liber abaci* où il expose le système de numération indo-arabe et le compare au système romain. Il est le premier grand mathématicien occidental à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Fibonacci poursuivit également ses propres travaux, il est à l'origine de cette suite récurrente, qui décrit la démographie d'une population de lapins.



Leonardo Pisano dit Fibbonacci ($\sim$ 1170–1250)

Exercice III

Faire un graphe pour calculer les 5 premiers termes des suites suivantes

1. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ pour $n \geq 0$

2. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$ pour $n \geq 0$

3. $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour $n \geq 0$

4. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour $n \geq 0$

5. $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ pour $n \geq 0$

Exercice IV

Donner le terme général des suites définies ci-dessous

1. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

2. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2}u_n - u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

Exercice V

Trouver les équilibres de

$$u_{n+1} = u_n^3 - 6u_n^2 + 12u_n - 6$$

Dans chaque cas préciser la stabilité de l'équilibre.