Feuille d'exercices 3

Suites numériques

Exercice I

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles majorées, minorées ou non bornées ?

1. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^4+1}$

3. $u_n = \frac{6n-1}{n+2}$

Exercice II

Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes vérifient le critère de Cauchy[1]

1. $u_n = \frac{1}{n+1}$

2. $u_n = n^2$

3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice III

Dire si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont croissantes, décroissantes, ou non-monotones.

1. $u_n = n^4 - n$

2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

3. $u_n = \frac{2^n(3n+1)}{n!}$

4. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

---

[1] Augustin Cauchy, mathématicien français du XIXe siècle, donna pour la première fois des définitions rigoureuses de la convergence et de la continuité. Il définit également les nombres complexes. Il travailla aussi sur les groupes de permutations ; cependant ayant égaré des manuscrits d'Abel et de Galois, il a retardé d'un demi-siècle la théorie des groupes.

Baron Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Exercice IV

En utilisant la définition de la limite, dites si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes ont une limite.

1. $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n^2}$

2. $u_n = \frac{1+e^n}{n}$

Exercice V

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & a \\ u_{n+1} & = & \frac{4u_n}{u_n+3} \end{array}\right.$$

où a est un réel, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \neq -3$ et $u_n \neq 0$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite l alors $l \in \{0;1\}$

2. Soit $v_n = 1 - \frac{1}{u_n}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Preciser la raison et le premier terme.

3. En déduire le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Cette limite depend-elle de a ?

Exercice VI

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \dfrac{1}{n} \\ v_n & = & 1-(-1)^n+\dfrac{2}{n} \\ w_n & = & 3-\dfrac{2n}{n+\frac{1}{2}} \end{array}$$

Dans chacun des 6 cas dites si une suite est sous-suite de l'autre.

Exercice VII

Calculer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si elle existe, dans les cas suivants.

1. $u_n = \frac{3^n}{n!}$

2. $u_n = 3^n - n^3$

3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$

4. $u_n = n\sin(\frac{1}{n+1})$

5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

6. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

7. $u_n = \frac{n^2-n}{n^2+1}$