Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2000-2001
CS 103 – Analyse I — F 01 – Semestre 1

Feuille d'exercices 1

Notions de base

Exercice I

Les applications suivantes sont-elle injectives ? Sont-elles surjectives ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \mapsto & 3^p(2q+1) \end{array} \qquad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (p,q) & \mapsto & 3^p(2q+1) \end{array}$$

$$h : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q,r) & \mapsto & 2^p3^q4^r \end{array} \qquad i : \begin{array}{rcl} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q,r) & \mapsto & 2^p3^q5^r \end{array}$$

Exercice II

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité de Minkowski[1] soit une égalité .

Exercice III

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point. Montrer qu'il existe une bijection de I sur J.

Exercice IV

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $\sqrt{3-x} \leq 1$

2. $\sqrt{2-x} + \sqrt{1+x} \geq 6$

3. $|x+2| = 3$

4. $|x+5| \leq 9$

5. $|x+1| + |x-3| \leq 9$

[1] Hermann Minkowski, mathématicien Russe de la fin du XIXe siècle, fut éléve de Hilbert et enseignant d'Einstein. Ses travaux en géométrie furent utile à la théorie de la relativité générale.

Hermann Minkowski (1864–1909)

Exercice V

Soient A et B deux intervalles fermés et bornés, c'est-à-dire de la forme $[x, y]$ avec x et y réels tels que $x < y$. On note

$$A + B = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}$$
$$AB = \{x \in \mathbb{R},\ \exists (a, b) \in A \times B,\ x = ab\}$$

1. Que vaut

$$C = [1, 2] + [-1, 5]$$
$$D = [1, 2]\,[-1, 5]$$

2. Soit A et B deux intervalles. Les applications f et g définies par

$$f : \begin{array}{ccc} A \times B & \to & A + B \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} A \times B & \to & AB \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array}$$

sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

3. Si $A = [a, \alpha]$ et $B = [b, \beta]$ montrer que $A + B$ et AB sont des intervalles fermés et bornés et trouver les bornes de ces intervalles.

4. Montrer que $A + B = B + A$.

Exercice VI

Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, un majorant, le plus grand élément, la borne supérieure, un minorant, le plus petit élément, la borne inférieure.

$$A = [0, 5[\qquad B = [0, 5[\cup\{7\} \qquad C =]-\infty, 0[\cup]1, 3[$$

$$D = \mathbb{Z}\cap]-2, 2] \qquad E = \{\tfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\} \qquad F = \{\tfrac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice VII

Soit I et J deux intervalles. Les ensembles suivants sont-ils des intervalles ?

1. $I \cup J$

2. $I \cap J$

3. $I + J = \{x + y,\ x \in I,\ y \in J\}$

Exercice VIII

Résoudre le systèmes suivants

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x + y + \sqrt{x + y} = 56 \\ x - y + \sqrt{x - y} = 30 \end{array} \right. \qquad (T) \left\{ \begin{array}{l} x + y = -2 \\ xy = 3 \end{array} \right.$$

Exercice IX

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $x^2 + mx - m = 0$. Discuter, selon m, le nombre de solutions de l'équation et calculer les solutions, lorsqu'elles existent.