

## Interrogation du 12/10/2001

correction du sujet  $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$

### Exercice I

$$f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$$

#### 1. Détermination des points critiques

Pour trouver les points critiques de  $f$ , il faut et il suffit de déterminer l'ensemble des vecteurs  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\nabla f(x, y) = (0, 0)^T$  c'est à dire l'ensemble des points qui sont solution du système d'équations ci dessous

$$\begin{cases} 6xy - 6x = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \\ x(y - 1) = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = 0 \text{ et } 3y^2 - 6y = 0 \\ \text{ou} \\ y = 1 \text{ et } 3x^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

On a donc les 4 points critiques suivants  $(x = 0, y = 0), (x = -1, y = 1), (x = 1, y = 1), (x = 0, y = 2)$

#### 2. Détermination de la nature des points critiques

Pour déterminer la nature des points critiques, il suffit d'étudier si la matrice hessienne est définie positive, définie négative ou indéterminée. Pour cela, on étudie les valeurs propres de la matrice hessienne aux différents points critiques. On sait (Cf le cours) que si les valeurs propres sont toutes positives (toutes négatives) (certaines positives et d'autres négatives), alors, la matrice hessienne est définie positive (négative) (indéterminée). Lorsque la matrice hessienne est définie positive (négative)(indéterminée), le point critique est un minimum local (maximum local) (point selle). Il est important de noter que le caractère *local* tient au fait que nous faisons un développement limité au second ordre. C'est donc seulement dans un voisinage que le point critique est un maximum ou un minimum.

La matrice hessienne est

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Etudions les 4 cas.

1) Au point  $x = +1, y = +1$  la matrice hessienne est

$$Hf(+1, +1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique  $P(\lambda) = \lambda^2 - 36$ . Les valeurs propres sont donc  $+6$  et  $-6$ . Le point critique est un point selle.

2) Au point  $x = -1, y = 1$ , la matrice hessienne est

$$Hf(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynome caractéristique  $P(\lambda) = \lambda^2 - 36$ . Les valeurs propres sont donc  $+6$  et  $-6$ . Le point critique est un point selle.

3) Au point  $x = 0, y = 0$ , la matrice hessienne est

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonale. La valeur propre double est  $-6$ . Le point critique est un maximum.

4) Au point  $x = 0, y = 2$ , la matrice hessienne est

$$Hf(0, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonale. La valeur propre double est  $6$ . Le point critique est un minimum.

## Exercice II

Les lignes séparatrices de col, s'obtiennent en étudiant la courbe de niveau d'altitude 0, c'est-à-dire les points  $(x, y)$  tels que

$$3yx^2 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2 = 0$$

cette équation est équivalente à  $3x^2(y-1) + y^3 - 3y^2 + 2 = 0$  or  $y^3 - 3y^2 + 2 = (y-1)(y^2 - 2y - 2)$  donc l'équation est équivalente à  $(y-1)(3x^2 + y^2 - 2y - 2) = 0$  ainsi la courbe de niveau d'altitude 0 est la réunion de la droite d'équation  $y = 1$  et de la courbe d'équation  $x = -\frac{1}{3}(y^2 - 2y - 2)$ . On place le minimum et le maximum et on obtient alors :

