Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation — Semestre 5

Examen du 9/11/2001

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Vos réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice I (7 points)

Soit $n \geq 2$ un entier. On se donne n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les points de ce nuage n'ont pas tous la même abscisse. Soit

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$$

1. Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$

2. Minimiser f sur $\mathbb{R}^2$

3. Trouver la droite "des moindres carrés" du nuage de points $\{(x_i, y_i)\}$.

Exercice II (5 points)

Utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 + x + y^2 - 2$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 = 4$.

Exercice III (3 points)

Utiliser un graphe pour maximiser la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} x - y \leq 0 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ 3x + 2y \leq 12 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

Exercice IV (5 points)

Le graphe ci-après représente les courbes de niveau de l'une des fonctions suivantes. Dites laquelle et pourquoi.

$$\begin{aligned} f :\ (x,y) &\mapsto (x-1)^2+y^2 \\ g :\ (x,y) &\mapsto x^3-3x-2y^2+y^4 \\ h :\ (x,y) &\mapsto 3x-x^3-2y^2+y^4 \end{aligned}$$