Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation — Semestre 5

Devoir 2

A rendre le 19/10/2001

Ce devoir doit être rédigé individuellement. Les exercices sont indépendants

Exercice I

Soit $n \geq 2$ un entier. On se donne n points (x_i, y_i) de $\mathbb{R}^2$. On suppose que les points de ce nuage n'ont pas tous la même abscisse. Soit

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

1. Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$

2. Minimiser f sur $\mathbb{R}^2$

3. Trouver la droite "des moindres carrés" du nuage de points $\{(x_i, y_i)\}$.

4. Appliquer au nuage de points $\{(1,2); (2,3); (0,-1)\}$.

Exercice II (CS, GI)

Soient a et b deux réels. On considère un triangle de sommets $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (a,b)$ et $P_2 = (2,0)$. tel que le segment $[P_0P_1]$ soit de longueur 1. Soit γ la courbe de Bézier associée aux points P_0, P_1 et P_2 dont l'origine est P_0 et l'extrémité est P_2. Trouver le ou les points P_1 tels que $\gamma(\frac{1}{2})$ soit le plus éloigné possible de l'origine.

Exercice III (MIF)

Un monopole possède deux établissements, 1 et 2, qui produisent chacun le même bien. La fonction de coût total des établissements 1 et 2 est respectivement $CT(q_1) = 2q_1^2 + 3q_1$ et $CT(q_2) = 3q_1^2 + q_2$. La fonction de demande du monopoleur est $Q = 120 - p$ ou $Q = q_1 + q_2$. On sait par ailleurs que la variable de décision du monopoleur est la quantité Q.

1. Ecrivez le programme d'optimisation du monopoleur en fonction de Q.

2. Calculez le vecteur $Q^* = (q_1^*, q_2^*) \in \mathbb{R}^+$ qui optimise le profit du monopoleur. Déduisez en le prix optimal ainsi que le profit réalisé.

3. Montrez que le vecteur $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$ maximise localement la fonction de profit.

4. Soit $h \in \mathbb{R}^2$. Quelle est l'erreur commise lorsque l'on remplace $\Pi(Q+h)$ par un développement limité à l'ordre 2.