Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 301 – Optimisation

Année 2001-2002
Semestre 5

Devoir 1

Correction

Exercice I

1. Le coefficient directeur de (T) est $f'(x_0)$ donc l'équation de cette droite est $y = f'(x_0)x + p$ avec $p \in \mathbb{R}$ à déterminer. Comme $(x_0, f(x_0)) \in (T)$ on a $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + p$. On obtient $p = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Ainsi l'équation de (T) est

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

2. Si (T) n'est pas horizontale alors $f'(x_0) \neq 0$. Comme f' est continue en x_0 il existe un voisinage V de x_0 tel que $\forall x \in V,\ f'(x) \neq 0$ ainsi f est strictement monotone sur V donc x_0 ne peut être un extremum local.

La réciproque est fausse comme le montre le contre exemple classique suivant : $x \mapsto x^3$.

3. Notons $h = x - x_0$. On a

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)h^2 + o(h^2)$$

Comme (T) est horizontale on a $f'(x_0) = 0$, par suite $f(x) = f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \phi(h)$ avec $\phi(h) \in o(h^2)$.

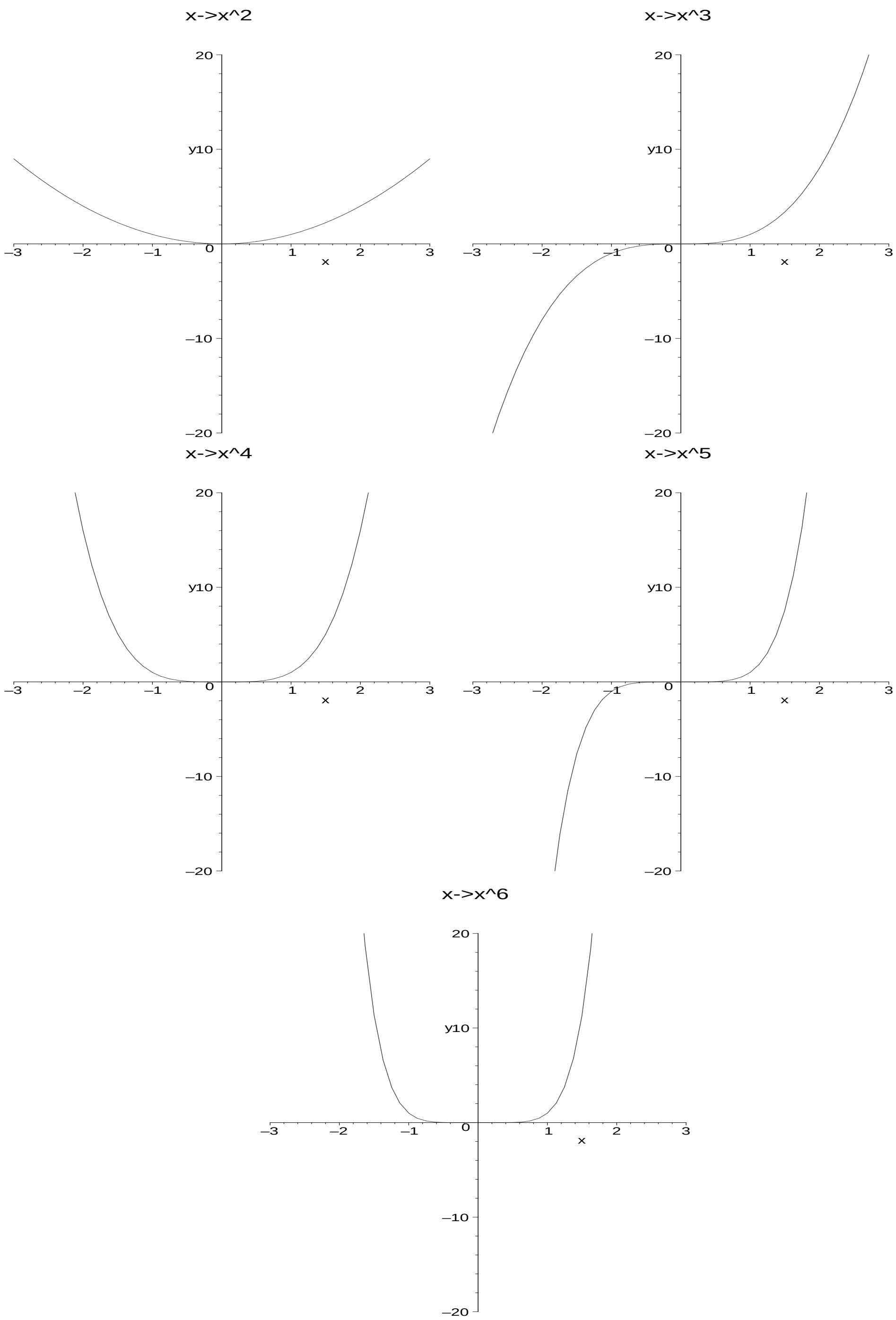
- Supposons $f''(x_0) > 0$. Il existe un voisinage V de x_0 dans lequel $\phi(h) > -\frac{1}{2}f''(x_0)h^2$ (l'idée est la suivante : sur ce voisinage ϕ est négligeable devant $f''(x_0)h^2$) ainsi $f(x) \geq f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 \geq f(x_0)$. Donc sur $\forall x \in V$ on a $f(x) \geq f(x_0)$. Donc x_0 est un minimum local.

- De manière analogue, si $f''(x_0) < 0$ alors il existe un voisinage V de x_0 dans lequel $f(x) \leq f(x_0)$ donc x_0 est un maximum local.

4. Faisons un D.L à l'ordre 3. Comme les deux premières dérivées sont nulles on a $f(x) = f(x_0) + f'''(x_0)h^3 + \phi(h)$. Si $f'''(x_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout voisinage $W \subset V$, on ait $f(x) - f(x_0)$ du signe de $f'''(x_0)h^3$. Ainsi $f(x) - f(x_0)$ change de signe dans W. Dans ce cas x_0 n'est pas un extremum local. Donc $f'''(x_0) = 0$ est une condition nécessaire pour x_0 soit un extremum.

La condition n'est pas suffisante comme le montre le contre exemple suivant : $x \mapsto x^5$.

5.



6. Soit p l'ordre de la première dérivée non nulle de f (on suppose qu'un tel p existe, ce qui est une hypothèse, voir la question subsidiaire).

- Si p est impaire alors f n'admet pas de maximum en x_0. En effet : $f(x) = f(x_0) + f^{(p)}(x_0)h^p + \phi(h)$. Comme $f^{(p)}(x_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout voisinage $W \subset V$, on ait $f(x) - f(x_0)$ du signe de $f^{(p)}(x_0)h^p$. Ainsi $f(x) - f(x_0)$ change de signe dans W puisque h^p change de signe. Dans ce cas x_0 n'est pas un extremum local.

- Si p est paire, alors f admet un extremum local en x_0 en effet $f(x) = f(x_0) + f^{(p)}(x_0)h^p + \phi(h)$ Comme $f^{(p)}(x_0) \neq 0$ alors il existe un voisinage V de x_0 tel que $f(x) - f(x_0)$ soit du signe de $f^{(p)}(x_0)h^p$ qui est constant puisque h^p ne change pas de signe. Notons que si $f^{(p)} > 0$ alors x_0 est un minimum local et si $f^{(p)} < 0$ alors x_0 est un maximim local,

Question subsidiaire Cette méthode ne permet pas de conclure dans tous les cas. En effet il se peut que p n'existe pas. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est de classe C^∞ et toutes ses dérivées sont nulles.

7. La fonction $x \to \frac{x^3}{3} + x\cos(x) - (1 + x^3)\sin(x)$ a ses trois premières dérivées nulles et sa quatrième dérivée négative. Le point $(0, 0)$ est donc un maximum local.

Exercice II

On a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} xy + 1 + y(x+y) \\ xy + 1 + x(x+y) \end{pmatrix}$$

Le point (x, y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} 2xy + 1 + y^2 = 0 \\ 2xy + 1 + x^2 = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} 2xy + 1 + y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} 2xy + 1 + y^2 = 0 \\ x = y \text{ ou } x = -y \end{cases}$$

si et seulement si ($3x^2 + 1 = 0$ et $x = y$) (sans solution) ou ($-x^2 + 1 = 0$ et $x = -y$) Ainsi $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) \in \{(1, -1),\ (-1, 1)\}$.