Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation — Semestre 5

Devoir 1

A rendre le 24/9/2001

Ce devoir doit être rédigé individuellement. Les deux exercices sont indépendants

Exercice I

On considère une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

1. Calculer l'équation de la droite (T) tangente à $(\mathcal{C})$ en $(x_0, f(x_0))$.

2. Pourquoi est-il nécessaire que (T) soit horizontale pour que f ait un extremum local en x_0 ? La réciproque est-elle vraie ? Dans toutes les questions suivantes, la droite (T) est supposée horizontale.

3. Calculer le D.L. de f à l'ordre 2. Montrer que f a un minimum local en x_0 si $f''(x_0) > 0$ et un maximum local si $f''(x_0) < 0$.

4. Désormais, on suppose en plus que $f''(x_0) = 0$. Montrer qu'il est nécessaire d'avoir $f'''(x_0) = 0$ pour que f ait un un extremum local en x_0. Cette condition est-elle suffisante ?

5. Tracer le graphe de $x \mapsto x^n$ pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

6. Donner une méthode pour dire si f a un extremum local en x_0, en étudiant les dérivées de f en x_0. (Question subsidiaire : cette méthode permet-elle de conclure dans tous les cas ?)

7. La fonction

$$x \longmapsto \frac{x^3}{3} + x\ \cos(x) - (1 + x^3)\ \sin(x)$$

admet-elle un extremum local en $x_0 = 0$. Si oui, de quelle nature ?

Exercice II

Trouver les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$$