Pôle Universitaire Léonard de Vinci — Année 2001-2002
CS 301 – Optimisation — Semestre 5

Feuille d'exercices 1

Optimisation libre

Exercice I

Calculer le gradient puis les points critiques pour chaque fonction f donnée ci-dessous.

1. $f(x,y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

2. $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

4. $f(x,y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

5. $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

6. $f(x,y) = xy - 2x - y$

7. $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

8. $f(x,y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}$

9. $f(x,y) = xy(1 - x - y)$

10. $f(x,y) = e^x \cos(y)$

11. $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$

12. $f(x,y) = (2x - x^2)(2y - y^2)$

Exercice II

Pour chaque fonction de l'exercice I, trouver les extremas et préciser la nature de celui-ci.

Exercice III

Pour chaque fonction de l'exercice I, esquisser les courbes de niveau de la fonction.

Exercice IV

Trouver les extrema des fonctions f suivantes sur le domaine D indiqué

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, D étant le triangle fermé de sommets $(-1,1)$, $(2,1)$ and $(-1,-2)$.

2. $f(x,y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice V

On considère les formes quadratiques q suivantes. Dans chaque cas dites si q est positive, négative ou ni l'un l'autre.

1. $q(x) = x_1^2 + 10x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_3x_1 - 6x_1x_2$

2. $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 + 4x_3^2$

3. $q(x) = 2x_1^2 + 8x_2x_3 + 3x_4^2 + 2x_1x_4$

4. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

Exercice VI

Calculer les extremas de la fonction f donnée.

1. $f(x, y, z) = 8x^2 + y^2 + x^2 + xz + zy + 1$

2. $f(x, y, z) = 19 - 19x + 8x^2 + y^2 + y + z^2 - 5z + xz + yz$

3. $f(x, y, z, t) = tx^2 + ty^2 + z^3$

Exercice VII (CS, GI)

Trouver trois nombres dont la somme est 100 et dont le produit est maximum.

Exercice VIII (CS, GI)

Trouver les points du plan $2x - y + z = 1$ qui sont le plus pret du point $(-4, 1, 3)$.

Exercice IX (CS, GI)

Le socle d'un aquarium (cet aquarium est parallépipédique droit) est constitué d'acier inoxidable, l'epaisseur du socle est de 1cm. Les côtés sont en verre et l'aquarium n'a pas de couvercle. Le mêtre cube de cet acier coute 5000 € et la plaque d'un mètre carré de verre coute 10 €. Les autres coûts (soudures, etc...) sont fixes, il sont de 50 €. On négligera epaisseur des parois dans le calcul du volume de l'aquarium. Donner la fonction à maximiser pour trouver le volume maximal de l'aquarium lorsqu'on dispose d'un budget de 400 €.

Exercice X (MIF)

Soit $f(x_1, \overline{x}_2)$ la fonction de production, ou x_1 est la quantité de facteur de production 1 et ou $\overline{x}_2$ est la quantité constante de facteur de production 2. La seule variable de décision de l'entreprise est donc x_1. Soit $q = f(x_1, \overline{x}_2)$ la production (*i.e.*, quantité du bien produit) de l'entreprise , ou f est une fonction de production croissante et concave en x_1, p est le prix unitaire du bien vendu, w_1, w_2 sont le prix des facteurs de production 1 et 2 respectivement. L'entreprise (agissant sur un marché concurrentiel) considère les prix p, w_1, w_2 comme des données exogènes.

1. Déterminer l'équation de la recette totale.

2. Déterminer l'équation du coût total.

3. Quel est le programme d'optimisation de l'entreprise ?

4. Déterminer l'équation de la condition nécéssaire.

5. Interpréter économiquement cette équation.

6. La condition suffisante pour un maximum local est-elle vérifiée ? On appelle courbe d'iso-profit l'ensemble des vecteurs (x_1, q) de $(\mathbb{R}^+)^2$ qui engendre un même profit.

7. Déterminer l'équation d'une courbe d'iso-profit.

8. Représenter $f(x_1, \overline{x}_2)$ ainsi qu'une courbe d'isoprofit. On mettra x_1 en abscisse et q en ordonnée.

9. Déterminer graphiquement la quantité optimale de facteur de production 1.

10. Etudier graphiquement les conséquences d'une baisse puis d'une hausse du prix du bien produit. Interpréter économiquement.

11. Question identique concernant le prix du facteur de production 1.

Exercice XI (MIF)

Une entreprise est en situation de monopole dans deux régions indépendantes, *i.e.* elle décide du prix de vente à afficher. La demande de la région 1 est $q_1(p) = 20 - 2p$ et la demande de la région est $q_2(p) = 30 - p$. On sait que le décideur public a interdit à l'entreprise de pratiquer une discrimination par les prix. Soit

$$Q(p) = \sum_{i=1}^{2} q_i(p)$$

la fonction de demande agrégée et $\Pi(p) = pQ(p) - CT(Q(p))$ la fonction de profit agrégée, ou $CT(Q(p))$ est la fonction de coût total. On rappelle qu'une fonction de demande n'est jamais négative, *i.e.* $q(p) \geq 0 \ \forall p \in \mathbb{R}^+$.

1. Déterminer l'équation de la demande agrégée.

2. Cette fonction de demande agrégée est elle une fonction linéaire du prix.

3. En supposant que les coûts de production sont nuls et que la variable de décision de l'entreprise est le prix, déterminer le programme d'optimisation de l'entreprise.

4. Calculer le (ou les) prix optimal (prix optimaux).

5. Représenter graphiquement la fonction de profit agrégée.

6. Faire les question 1 à 5 dans le cas ou $q_2(p) = 46 - p$.