Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 301 – Optimisation

Année 2001-2002
Semestre 8

Interrogation du 5/3/2002

Corrigé

Exercice I

1. Le gradient de f au point (x, y) est donné par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y - 2xy - y^2 \\ x - x^2 - 2xy \end{pmatrix}$$

Le point (x, y) est critique si et seulement si

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0 \\ x(1 - x - 2y) = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y = 0 \text{ ou } 1 - 2x - y = 0 \\ x = 0 \text{ ou } 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x, y) \in \{(0, 0),\ (1, 0),\ (0, 1)\ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.

2. La matrice hessienne de f au point (x, y) est donnée par

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le determinant est négatif, donc $(0, 0)$ est un point selle.

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont le determinant est négatif, donc $(1, 0)$ est un point selle.

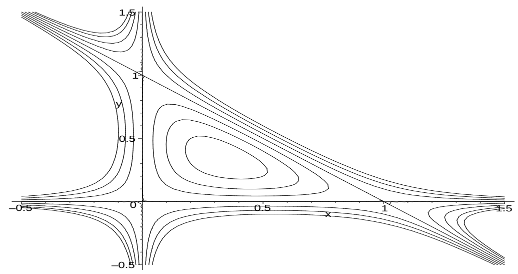
$$\mathrm{H}\, f(0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le determinant est négatif, donc $(0, 1)$ est un point selle.

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont le determinant est positif et la trace négative, donc $(1/3, 1/3)$ est un maximum local.

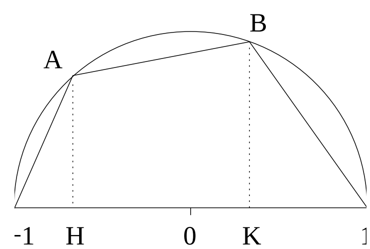
3. On prend un soin particulier pour tracer la courbe de niveau d'altitude 0 (celle des points critiques). Il s'agit de la reunion des droites d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $y = 1 - x$.



Exercice II

1. Le point (x, y) appartient au demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en $(0,0)$ équivaut à $y \geq 0$ et $x^2 + y^2 = 1$ ce qui équivaut donc à $y = \sqrt{1-x^2}$ avec $x \in]0,1[$.

Ainsi les coordonnées de A sont $(a, \sqrt{1-a^2})$ et celles de B sont $(b, \sqrt{1-b^2})$. Notons $H = (a, 0)$ et $K = (b, 0)$.



L'aire cherchée s'obtient soit en intégrant entre -1 et 1 une fonction linéaire par morceaux soit en ajoutant l'aire du triangle IHA qui vaut $\frac{1}{2}(a - (-1))\sqrt{1-a^2}$, l'aire du trapèze $HABK$ qui vaut $(b-a)\frac{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2}}{2}$ et l'aire du triangle KBJ qui vaut $\frac{1}{2}(1-b)\sqrt{1-b^2}$. Ainsi

$$f(a,b) = \frac{1}{2}\left((a+1)\sqrt{1-a^2} + (b-a)(\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2}) + (1-b)\sqrt{1-b^2}\right)$$

ce qui donne, après simplication, l'expression de f annoncée.

2. Le gradient en $(0,0)$ est orthogonal en ce point à la ligne de niveau d'altitude $f(0,0) = 1$. Pour trouver le sens, calculons f en $(-1/2, -1/2)$ par exemple, $f(-1/2, 1/2) = 3\sqrt{3}/4 > 1 = f(0,0)$. Le gradient est pointé dans le sens des lignes de niveau d'altitudes croissantes.

3. Selon les courbes de niveau f admet un extremum en $(-1/2, 1/2)$, en vertu de la question précédente il s'agit d'un maximum. On a donc $a = -1/2$ et $b = 1/2$ ce qui donne

$$A(-1/2, \frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ et} B(1/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

4. Remarquons que $a = -1$ ou $b = 1$ ne peuvent convenir puisque f s'annule en ces points. La fonction f est C^2 sur $]-1,1[\times]1,1[$ donc les théorèmes du cours s'appliquent.

$$\nabla f(a,b) = \begin{pmatrix} (1+b)\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} - \sqrt{1-b^2} \\ \sqrt{1-a^2} + (1-a)\frac{-b}{\sqrt{1-b^2}} \end{pmatrix}$$

Ainsi (a,b) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} -a(1+b) = \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2} \\ b(1-a) = \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} -a(1+b) = \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2} \\ b(1-a) = -a(1+b) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} a = -b \\ b(1+b) = \sqrt{1-b^2}\sqrt{1-b^2} \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 2b^2 + b - 1 = 0 \\ a = -b \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} b = -1(\text{exclu}) \text{ ou} b = 1/2 \\ a = -b \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(a,b) = (-1/2, 1/2)$ ce qui a été trouvé à la question 2.