

Interrogation du 5/3/2002

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les deux exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Ce sujet doit être rendu avec votre copie.

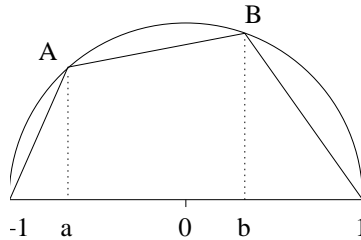
Exercice I (8 points)

On considère la fonction de deux variables réelles $f(x, y) = xy - x^2y - xy^2$

1. Quels sont les points critiques de cette fonction
2. Indiquez la nature de chaque point critique
3. Esquisser les courbes de niveau de la fonction f

Exercice II (12 points)

Considérons le demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en $(0, 0)$ et deux points A et B sur ce demi-cercle. Notons I et J les extrémités du demi-cercle, et a et b les abscisses respectives de A et B .



1. Montrer que lorsque $-1 < a \leq b < 1$, l'aire de $(IABJ)$ est donnée par

$$f(a, b) = \frac{1}{2} \left((1+b)\sqrt{1-a^2} + (1-a)\sqrt{1-b^2} \right)$$

2. Au verso, se trouvent des courbes de niveau de f tracées par Maple. Dessiner sur le graphe le sens et la direction du vecteur $\nabla f(0, 0)$.
3. Au moyen des courbes de niveau, trouver A et B qui maximisent l'aire de $(IABJ)$.
4. Confirmer le résultat trouvé à la question précédente en calculant le point critique de f . (On ne demande pas de vérifier la nature de ce point).

